Piramida

Zadaci

1. Izraziti zapreminu pravilnog tetraedra u funkciji ivice a.

2. Izračunaj visinu pravilne šestostrane piramide ako bočna ivica dužine $6cm$ obrazuje sa ravni osnove ugao od $45°$.

3. Pravilna četvorostrana piramida osnovne ivice $4\sqrt{2}cm$ i visine $4cm$, podeljena je sa dva dijagonalna preseka na četiri piramide. Izračunaj površinu jednog od tih delova.

4. Osnova piramide je romb stranice $6cm$ i tupog ugla od $120°$. Izračunaj površinu te piramide ako je visina piramide jednaka visini romba.

5. Osnova piramide je trougao čije su stranice $13cm$, $14cm$ i $15cm$. Bočna ivica naspram srednje po veličini osnovne ivice normalna je na ravan osnove i jednaka je $16cm$. Izračunati površinu i zapreminu piramide.

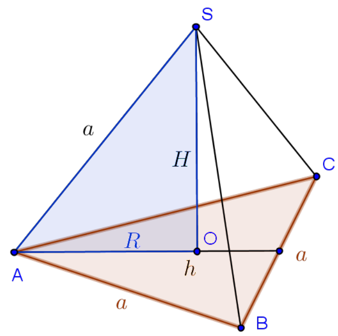
6. U pravilnu četvorostranu piramidu osnovne ivice a i bočne ivice $\frac{3}{4}a$, upisana je kocka čija donja osnova leži u osnovi piramide a temena gornje osnove su na bočnim ivicama piramide. Izračunaj površinu te kocke.

7. Središta ivica pravilnog tetraedra su spojena. Izraziti površinu i zapreminu tako dobijenog tela u funkciji ivice tetraedra.

8. Središta ivica $AB, BC, CC_1, C_1D_1, D_1A_1, A_1A$ kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ su spojena redom, a zatim su sva spojena sa temenom B_1. Izraziti površinu i zapreminu tako dobijenog tela u funkciji ivice kocke.

Rešenja

1.

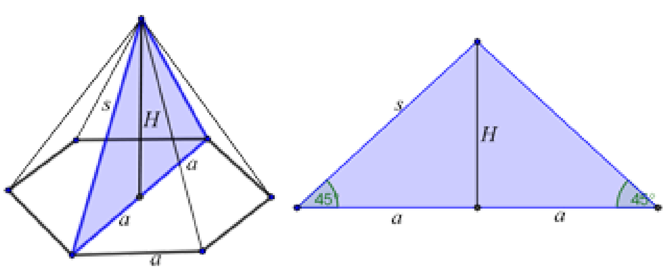


Iz trougla $\triangle AOS$ imamo da je $H^2 = a^2 - R^2$ gde je R poluprečnik opisane kružnice jednakostraničnog trougla $\triangle ABC$ pa je $R = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$H^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2 - \frac{a \cdot 3}{9} = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

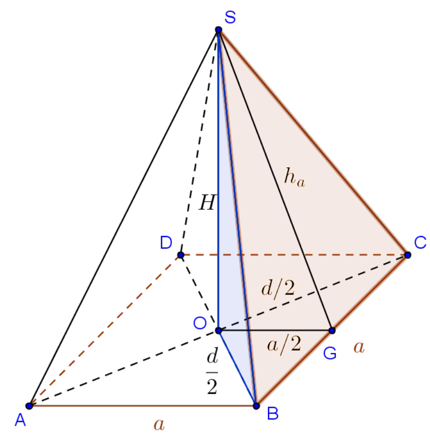
$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{18}}{36} = \frac{a^3 \cdot 3\sqrt{2}}{36} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

2.



Ugao kod vrha piramide je prav. Ako spustimo visinu iz vrha piramide, ona taj pravougli trougao deli na dva podudarna jednakokraka trougla. Odatle možemo da zaključimo da je visina piramide jednaka osnovnoj ivici a, pa primenom Pitagorine teoreme dobijamo: $s^2 = a^2 + H^2$; $(6cm)^2 = 2H^2$; $H^2 = 18cm^2$, pa je $H = 3\sqrt{2}cm$.

3.



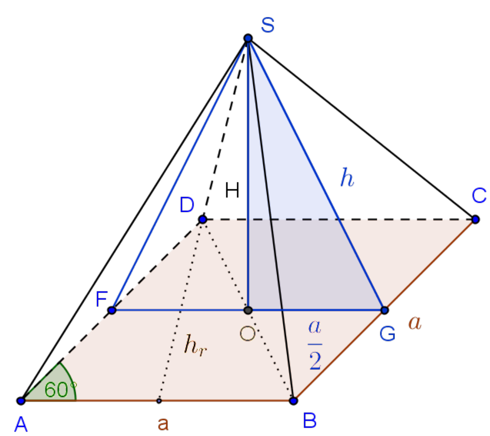
Baza nove piramide je jednakokrako-pravougli trougao $\triangle COB$ sa katetama $\frac{d}{2}$. Omotač čine dva jednaka pravougla trougla $\triangle SOB$ i $\triangle SOC$ i bočna strana stare piramide $\triangle SBC$.

$d^2 = 2a^2$; $d^2 = 64cm^2$ pa je $d = 8cm$.

Iz $\triangle SOG$ imamo $h_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + H^2$, $h_a^2 = 8cm^2 + 16cm^2$, $h_a = 4\sqrt{6}cm$.

$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^2 = 8cm^2,\ M = 2 \cdot \frac{H \cdot \frac{d}{2}}{2} + \frac{a \cdot h_a}{2} = (16 + 16\sqrt{3})cm^2,\ P = 8(3 + 2\sqrt{3})cm^2.$$

4.



Posmatrajmo bazu prizme i primetimo da ako manjom dijagonalom podelimo romb, dobićemo dva jednakostranična trougla. Visina svakog trougla biće $h_r = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}cm$, pa je i $H = 3\sqrt{3}cm$.

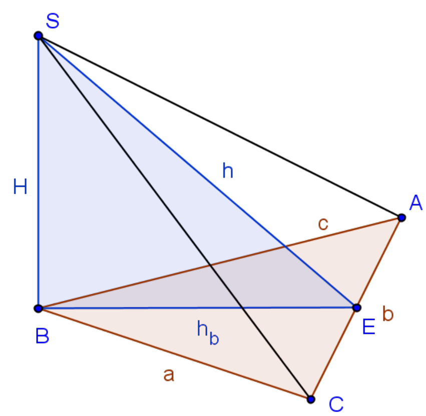
Iz trougla $\triangle SOG$ omamo $h^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 27cm^2 + 9cm^2 = 36cm^2$, pa je $h = 6cm$.

$$B = a \cdot h_r = 6cm \cdot 3\sqrt{3}cm = 18\sqrt{3}cm,\ M = 4 \cdot \frac{a \cdot h}{2} = 72cm^2$$

$$P = M + B = 72cm^2 + 18\sqrt{3}cm^2 = 18(4 + \sqrt{3})cm^2.$$

5. $a = 13cm$, $b = 14cm$ $c = 15cm$ pa je poluobim osnove $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = 21cm$. Na osnovu Heronovog obrasca je $B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 6} = 84cm^2$.

$V = \dfrac{1}{3}BH = \dfrac{1}{3} \cdot 84cm^2 \cdot 16cm = 448cm^3$.

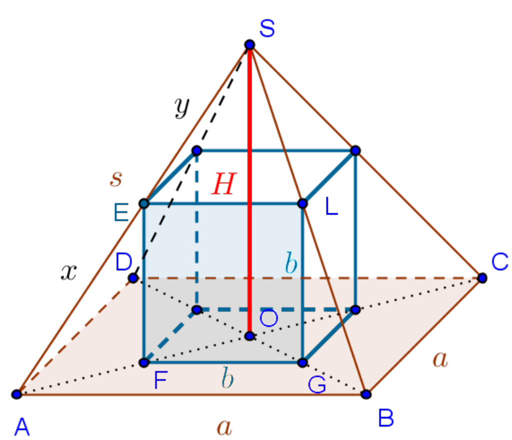


Kako je $B = \dfrac{bh_b}{2}$, to je $h_b = \dfrac{2B}{b} = 12cm$.

Iz trougla $\triangle SBE$ je $h^2 = H^2 + h_b^2$ odakle dobijamo da je $h = 20cm$.

Površina piramide je jednaka zbiru površina trouglova $\triangle ABC$, $\triangle SBC$, $\triangle SAC$ i $\triangle SAB$. $P = B + \dfrac{aH}{2} + \dfrac{bh}{2} + \dfrac{cH}{2}$ odakle dobijamo $P = 448cm^2$.

6.



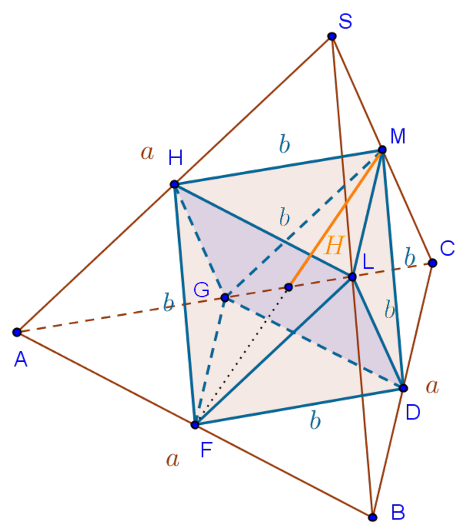
Iz trougla $\triangle AOS$ je $H^2 = s^2 - \left(\dfrac{d}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{4}a\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{16}$ odakle je $H = \dfrac{a}{4}$.

$\triangle SEL \sim \triangle SAB \Rightarrow SE : SA = EL : AB \Rightarrow y : s = b : a \Rightarrow y = \dfrac{sb}{a} = \dfrac{\frac{3}{4}ab}{a} = \dfrac{3}{4}b$.

$\triangle AEF \sim \triangle AOS \Rightarrow EF : SO = AE : AS$ tj.
$b : H = x : s$
$bs = xH$
$bs = (s - y) \cdot H$
$bs = (s - \frac{3}{4}b) \cdot H$
$b \cdot \frac{3}{4}a = (\frac{3}{4}a - \frac{3}{4}b) \cdot \frac{a}{4}$
$\frac{3}{4}ab = \frac{3}{16}a(a - b)$
$4b = a - b$
$5b = a$
$b = \dfrac{a}{5}$

Povšine kocke je $P = 6b^2 = 6 \cdot \left(\dfrac{a}{5}\right)^2 = \dfrac{6}{25}a^2$.

7. Dobijeno telo se naziva **pravilan oktaedar**. Čine ga dve pravilne četvorostrane jednakoivične piramide sa zajedničkom osnovom i vrhovima sa raznih strana te osnove. Na slici je zajednička osnova kvadrat $HGDL$ a vrhovi su tačke F i M.

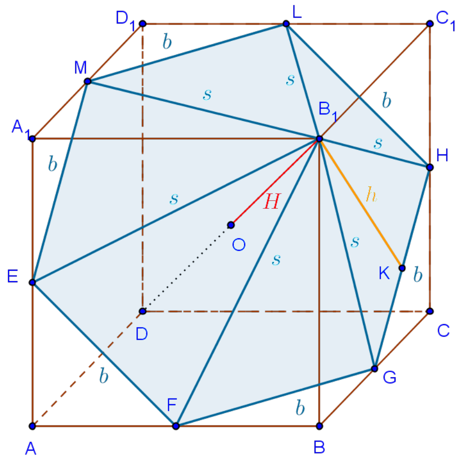


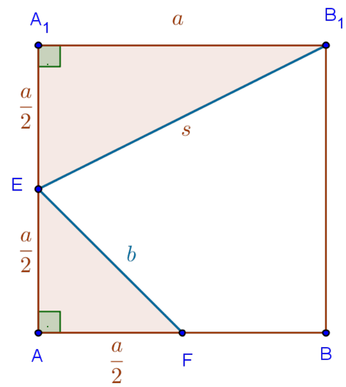
Duž $HL = b$ je srednja linija trougla $\triangle ABS$ pa je jednaka polovini naspramne stranice, tj. $b = \dfrac{a}{2}$. Površ oktaedra čini osam jednakostraničnih trouglova stranice b, pa je $P = 8 \cdot \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

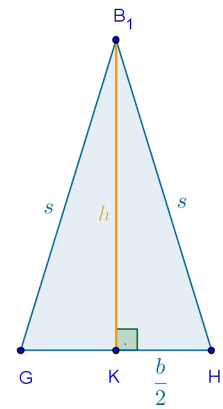
Četvorougao $FDMH$ je kvadrat stranice b, pa je $FM = b\sqrt{2}$ kao dijagonala tog kvadrata. Visina jedne od četvorostranih piramida jednaka je polovini duži FM, tj. $H = \dfrac{b\sqrt{2}}{2}$. Zapreminu oktaedra čine zapremine dve četvorostrane piramide:

$V = 2 \cdot \dfrac{1}{3}BH = \dfrac{2}{3} \cdot b^2 \cdot \dfrac{b\sqrt{2}}{2} = \dfrac{b^3\sqrt{2}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}$

8. Dobijeno telo je pravilna šestostrana piramida sa vrhom u tački B_1.







Iz trougla $\triangle AFE$ je osnovna ivica piramide $b^2 = 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2$ odakle je $b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Površina osnove je $B = 6 \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Visina piramide jednaka je polovini dijagonale kocke: $H = \frac{D}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Zapremina piramide je $V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{8}$.

Iz trougla $\triangle A_1B_1E$ je bočna ivica $s^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}a^2$. Iz trougla $\triangle B_1KH$ je apotema $h^2 = s^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{5}{4}a^2 - \frac{1}{8}a^2 = \frac{9}{8}a^2$, pa je $h = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Površina omotača je $M = 6 \cdot \frac{bh}{2} = 3 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} = \frac{9a^2}{4}$.

Površina piramide je $P = B + M = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{9a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}(\sqrt{3} + 3)$.