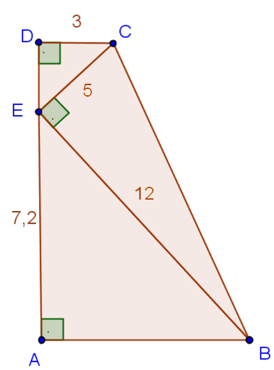
Mnogougao

Zadaci

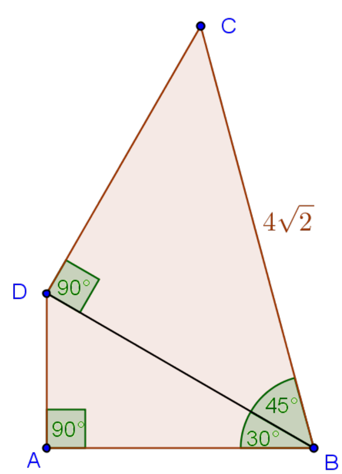
1. Nad stranicama kvadrata stranice $a = 10cm$ sa spoljnje strane su konstruisani jednakostranični trouglovi. Odrediti obim i površinu tako dobijenog mnogougla (osmougla). Odrediti obim i površinu mnogougla čija su temena slobodna temena jednakostraničnih trouglova, tj. temena koja ne pripadaju kvadratu.

2. Nad stranicama jednakostraničnog trougla stranice $a = 30cm$ sa spoljnje strane su konstruisani kvadrati. Slobodna temena kvadrata, tj. ona temena koja ne pripadaju trouglu, međusobno su spojena. Izračunati obim i površinu tako dobijenog šestougla.

3. Izračunaj obim i površinu trapeza sa slike.

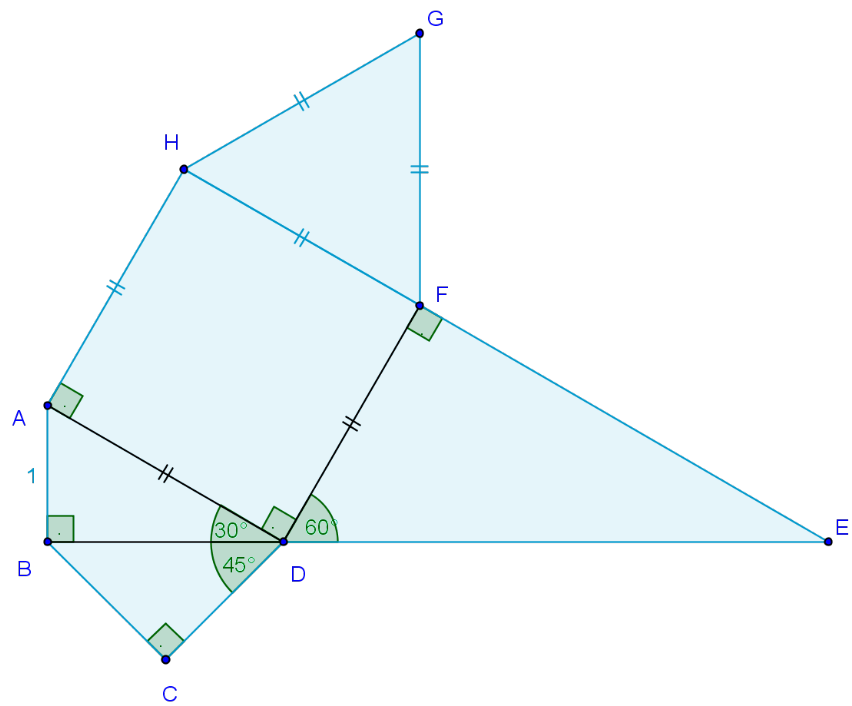


4. Izračunaj obim i površinu četvorougla $ABCD$ koristeći podatke sa slike.



5. Izračunaj površinu pravouglog trougla obima $(60 + 20\sqrt{3})cm$ čiji je jedan oštar ugao $30°$.

6. Izračunaj površinu mnogougla $ABCDEFGH$ na slici.



7. U kružnicu $k(O, R)$ su upisani pravilan osmougao i pravilan dvanaestougao. Odredi odnos površina ovih mnogouglova.

8. Ako se broj stranica pravilnog mnogougla poveća za 3, onda se broj njegovih dijagonala poveća dva puta. Koliki je spoljašnji ugao tog mnogougla?

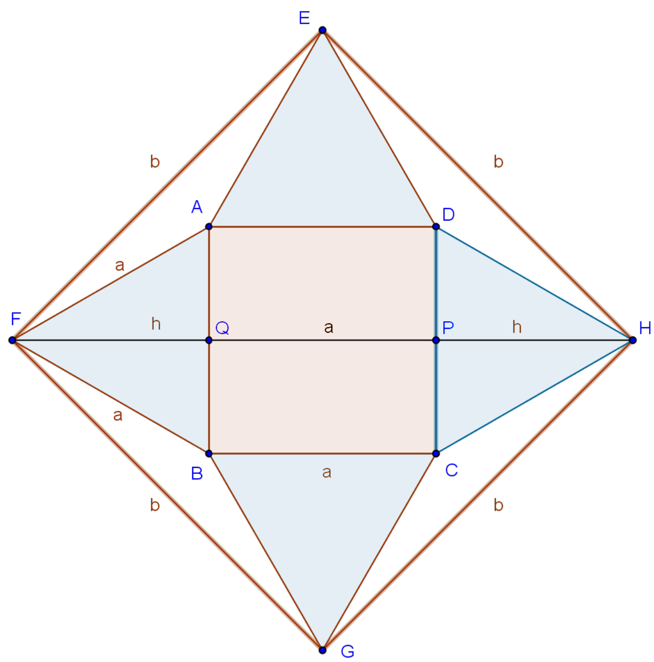
9. Ako se broj stranica mnogougla poveća za 27 onda se broj dijagonala poveća za 1998. Koliko dijagonala ima taj mnogougao?

10. Broj dijagonala mnogougla sa m stranica veći je od broja dijagonala mnogougla sa n stranica za 1999. Odrediti m i n.

11. Koliki je zbir unutrašnjih uglova bilo koje zvezde petokrake?

Rešenja

1.



Obim osmougla $O_8 = 8a = 80cm$.

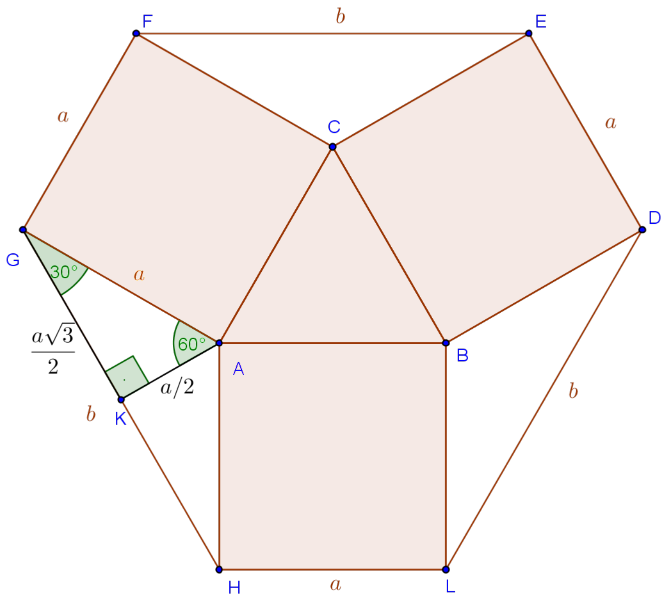
Površina osmougla $P_8 = P_{ABCD} + 4 \cdot P_{\triangle} = a^2 + 4 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2(1+\sqrt{3}) = 100(1+\sqrt{3})cm^2$.
Slobodna temena jednakostraničnih trouglova obrazuju kvadrat $EFGH$ čija je dijagonala $FH = d = a + 2h = a + 2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a(1+\sqrt{3}) = 10(1+\sqrt{3})cm$.

$$P_{EFGH} = \frac{d^2}{2} = \frac{\left(10(1+\sqrt{3})\right)^2}{2}cm^2 = \frac{100(1+\sqrt{3}+\sqrt{3}+3)}{2}cm^2 = 100(2+\sqrt{3})cm^2.$$

Stranica kvadrata $EFGH$ je $b = \sqrt{100(2+\sqrt{3})}cm = 10\sqrt{2+\sqrt{3}}cm$, pa je obim kvadrata $O_{EFGH} = 4b = 40\sqrt{2+\sqrt{3}}cm$

2. Pravougli trougao $\triangle AKG$ je „pola" jednakostraničnog pa mu je kateta $GK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ kao visina jednakostraničnog trougla. Kako je $b = 2 \cdot GK$, to je $b = a\sqrt{3} = 30\sqrt{3}cm$.
Obim šestougla $HLDEFG$ je $O = 3a + 3b = 90cm + 90\sqrt{3}cm = 90(1+\sqrt{3})cm$.
Površina $\triangle GHA$ je jednaka površini jednakostraničnog trougla stranice a jer se sastoji od dve „polovine" jednakostraničnog trougla. Isto važi i za površine trouglova $\triangle LDB$ i $\triangle EFC$. Znači ukupna površina šestougla $HLDEFG$ je:

$$P_{HLDEFG} = 4 \cdot P_{\triangle} + 3 \cdot P_{kvadrata} = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a^2 = a^2(\sqrt{3}+3) = 900(\sqrt{3}+3)cm^2.$$



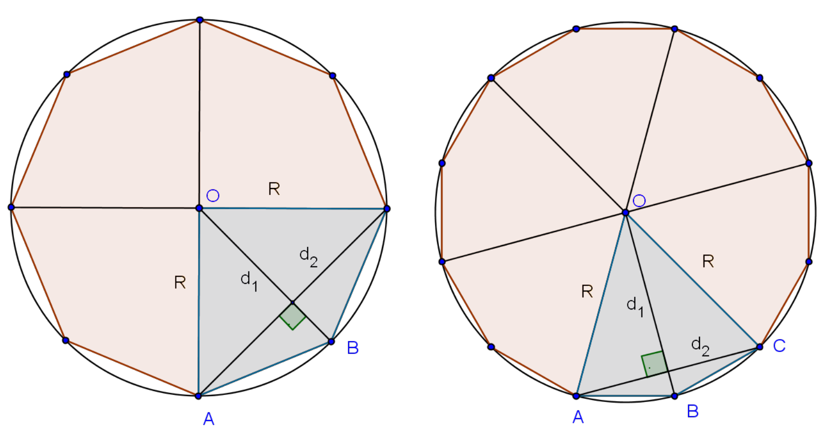
3. $DE = 4cm; BC = 13cm; AB = 9,6cm; O = 36,8cm; P = 70,56cm^2.$

4. $BD = CD = 4; AD = 2; AB = 2\sqrt{3}; O = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 6; P = 8 + 2\sqrt{3}.$

5. Ako je kraća kateta a, onda je hipotenuza $2a$, a duža kateta $a\sqrt{3}$.
   $a = 20cm; P = 200\sqrt{3}cm.$

6. $P = \dfrac{19 + 14\sqrt{3}}{4}cm^2.$

7.



Pravilan osmougao se sastoji od četiri podudarna deltoida pa je $P_8 = 4 \cdot \frac{d_1 d_2}{2} = 2d_1 d_2$ gde su d_1 i d_2 dijagonale deltoida. Jedna dijagonala jednaka je poluprečniku opisane kružnice oko osmougla $d_1 = OB = R$, a druga $d_2 = AC = R\sqrt{2}$.

$P_8 = 2d_1 d_2 = 2 \cdot R \cdot R\sqrt{2} = 2R^2\sqrt{2}$.

Slično, površina pravilnog dvanaestougla je $P_{12} = 6 \cdot \frac{d_1 d_2}{2} = 3d_1 d_2$. Kako je $d_1 = d_2 = R$, to je $P_{12} = 3R^2$.

Odnos površina ovih mnogouglova je $P_8 : P_{12} = \frac{2R^2\sqrt{2}}{3R^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

8. $D_{n+3} = 2D_n$ tj. $\frac{(n+3)(n+3-3)}{2} = 2 \cdot \frac{n(n-3)}{2}$. Rešavanjem ove jednačine dobija se $n = 9$. Spoljašnji ugao je $\frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$.

9. $D_{n+27} = D_n + 1998$ tj. $\frac{(n+27)(n+27-3)}{2} = \frac{n(n-3)}{2} + 1998$. Rešavanjem ove jednačine dobija se $n = 62$. $D_n = 1829$.

10. $D_m - D_n = 1999$
$\frac{m(m-3)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = 1999$
$m^2 - 3m - n^2 + 3n = 3998$
$m^2 - n^2 - 3(m-n) = 3998$
$(m-n)(m+n) - 3(m-n) = 3998$
$(m-n)(m+n-3) = 3998$

Rastavljanjem broja 3998 na proste činioce dobijamo da je $3998 = 2 \cdot 1999$ što znači da je $m - n = 2$ i $m + n - 3 = 1999$.

$m - n = 2 \Rightarrow m = n + 2 \Rightarrow m + n - 3 = n + 2 + n - 3 = 2n - 1$. Znači $2n - 1 = 1999$ odakle je $n = 1000$ i $m = 1002$.

11. $S_5 + 5 \cdot S_3 = 1440^\circ$.