

Tačka, prava i ravan

Zadaci

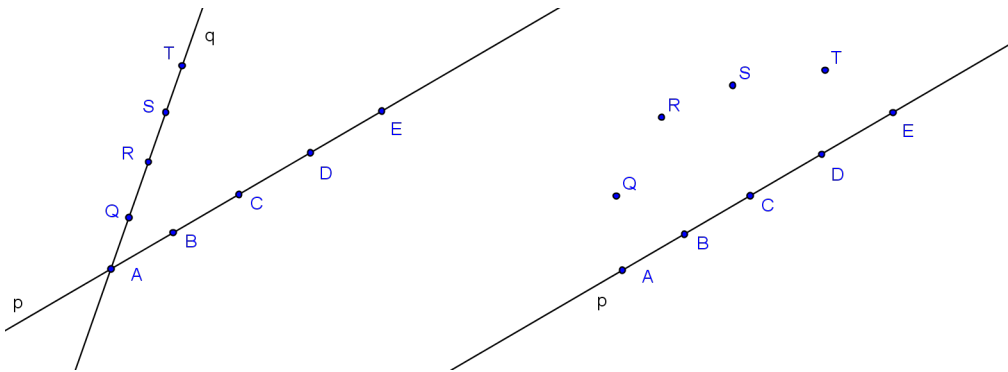
1. Dato je 10 tačaka. Koliko je najviše pravih, a koliko ravni određeno datim tačkama?
2. U ravni α data je prava p i na njoj pet tačaka A, B, C, D i E . Van prave p , a u ravni α dato je još četiri tačke Q, R, S i T . Koliko je najmanje, a koliko najviše pravih određeno sa ovih devet tačaka?
3. Tačka A je od ravni α udaljena $8cm$, a tačka B je od ravni α udaljena $3cm$. Koliko je rastojanje između tačaka A i B , ako normalna projekcija duži AB na ravan α (duž $A'B'$) ima dužinu $12cm$? Koliko ima rešenja?
4. Date su tri duži koje se seku tako da im se središta poklapaju (pritom nijedna od duži ne sadrži neku drugu). Koliko najviše, a koliko najmanje pravih je određeno krajevima tih duži?
5. Koliko ravni određuju temena kocke?
6. Na svakoj stranici kvadrata date su po tri tačke tako da nijedna od njih nije teme kvadrata. Koliko je trouglova određeno ovim tačkama?
7. Temena datog trougla $\triangle ABC$ nalaze se sa iste strane ravni α i udaljena su od nje za $24cm, 30cm$ i $39cm$ redom. Odrediti koliko je od ravni α udaljeno težište T trougla $\triangle ABC$.
8. Tačke A, B, C, D, E, F su temena pravilnog mnogougla, a tačka S ne pripada ravni tog mnogougla.
 - a) Koliko je pravih određeno sa po dve od tih 7 tačaka?
 - b) Koliko je ravni određeno sa po tri od tih 7 tačaka?
9. Koliko je najviše ravni određeno sa 3 tačke i 3 paralelne prave?
10. Koliko najviše ravni određuju tri paralelne prave i pet tačaka od kojih su tri kolinearne?
11. U ravni α se nalazi pravougli trougao $\triangle ABC$ sa katetama od $3cm$ i $4cm$. U središtu C_1 hipotenuze AB je postavljen duž C_1M normalna na ravan α . Ako je tačka M udaljena $5cm$ od ravni α , koliko je njeno odstojanje od tačke C ?
12. Na ivicama AB i BC kocke $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ date su tačke M i N takve da je $BM = BN$. Izračunaj dužinu duži MN ako ravan MND_1 zaklapa sa ravni ABC ugao od 45° , a ivica kocke je $10cm$.

Rešenja

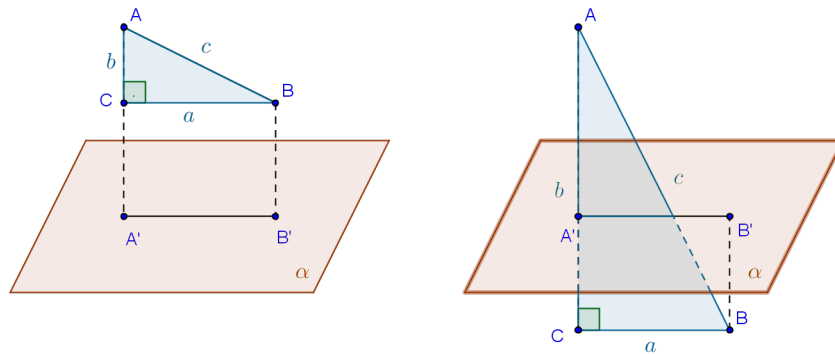
1. Parova tačka ima $10 \cdot 9 : 2 = 45$. Svakom od ovih parova se može dodati po jedna od 8 preostalih tačaka, tako da trojaka tačaka ima $45 \cdot 8 : 3 = 120$. Znači 45 pravih i 120 ravni.

2. Najmanje: $4 \cdot 4 + 2 = 18$ (na slici levo svaka od B, C, D i E sa svakom od Q, R, S i T plus prave p i q).

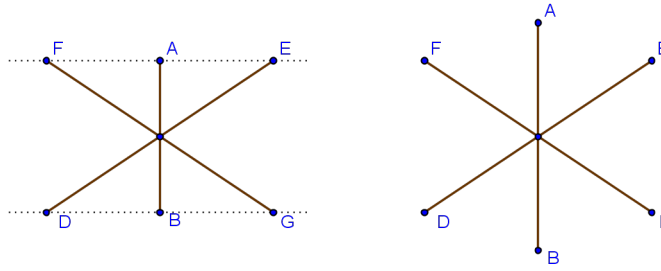
Najviše: $4 \cdot 3 : 2 + 5 \cdot 4 + 1 = 27$ (na slici desno svaka sa svakom od Q, R, S i T plus svaka od A, B, C, D i E sa svakom od Q, R, S i T plus prava p).



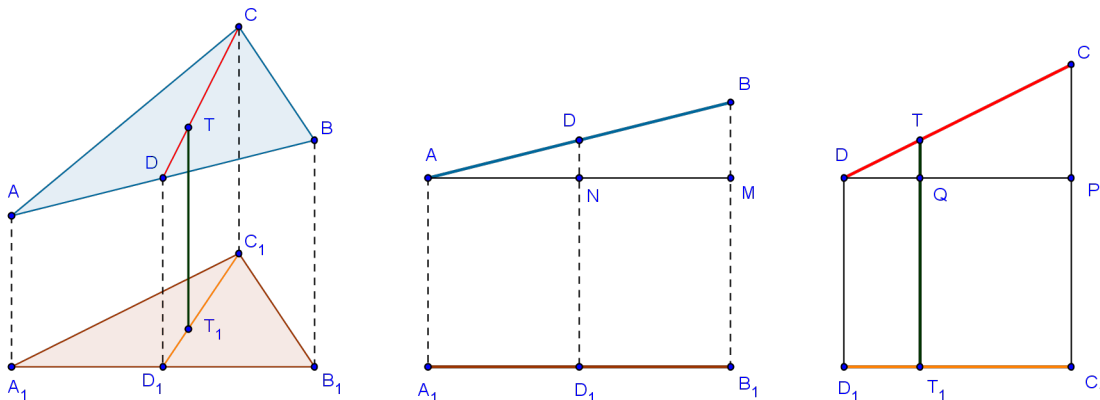
3. Ima dva rešenja. Ako su sa iste strane ravni α (slika levo) $AB = 13\text{cm}$. Ako su sa raznih strana ravni α (slika desno) $AB = \sqrt{265}\text{cm}$.



4. Najmanje $3 \cdot 3 + 2 = 11$ (slika levo). Najviše $6 \cdot 5 : 2 = 15$ (slika desno).



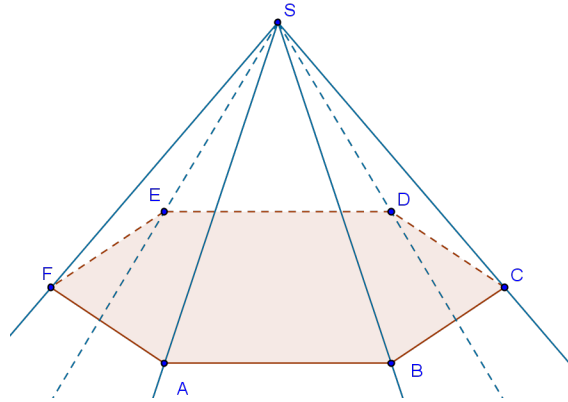
5. Osam tačkaka od kojih nema četiri koplanarne određuje 56 ravni (pogledaj 1. zadatak; nekoplanarne su tačke koje ne pripadaju istoj ravni). Temena kocke formiraju 12 četvorki koplanarnih tačkaka. Svaka od ovih četvorki određuje po 1 ravan. Kako smo kod 56 ravni računali da svaka onakva četvorka određuje 4 ravni, potrebno je od tog broja oduzeti po 3 ravni za svaku četvorku koplanarnih tačkaka. Dakle, $56 - 12 \cdot 3 = 20$, pa je određeno 20 ravni.
6. Moguće je da dva temena trougla pripadaju istoj stranici kvadrata ili da svako teme trougla pripada različitoj stranici kvadrata. U prvom slučaju, na 4 načina biramo stranicu kvadrata kojoj pripadaju dva temena trougala, na 3 načina biramo dve od tri tačke sa izabrane stranice i na 9 načina biramo treće teme trougla od tačkaka koje pripadaju ostalim stranicama kvadrata. Sledi da je, u ovom slučaju, datim tačkama određeno $4 \cdot 3 \cdot 9 = 108$ trouglova. U drugom slučaju, na 4 načina biramo tri od četiri stranice kvadrata kojima pripada po jedno teme trougla, a na $3 \cdot 3 \cdot 3$ načina sa svake od izabranih stranica kvadrata po jednu od tri date tačke. Sledi da je, u ovom slučaju, datim tačkama određeno $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108$ trouglova. Prema tome, ukupno je datim tačkama određeno 216 trouglova.
7. Na prvoj slici sleva su prikazani odnosi u prostoru, a na ostale dve slike su izdvojeni detalji sa prve slike.



Posmatrajmo sliku u sredini. Iz $\triangle ABM \sim \triangle ADN$ imamo da je $DN : BM = AD : AB$. Pošto je tačka D u središtu duži AB , onda je $AD : AB = 2 : 1$, pa je $DN : (30\text{cm} - 24\text{cm}) = 2 : 1$, odakle je $DN = 3\text{cm}$. $DD_1 = 24\text{cm} + 3\text{cm} = 27\text{cm}$.

Na trećoj slici iz $\triangle DPC \sim \triangle AQT$ imamo da je $TQ : CP = DT : DC$. Pošto težište deli težišnu duž u razmeri $1 : 2$, imamo da je $DT : DC = 1 : 3$, pa je $TQ : (39\text{cm} - 27\text{cm}) = 1 : 3$ odakle je $TQ = 4\text{cm}$. Konačno $TT_1 = TQ + QT_1 = 4\text{cm} + 27\text{cm} = 31\text{cm}$.

8.



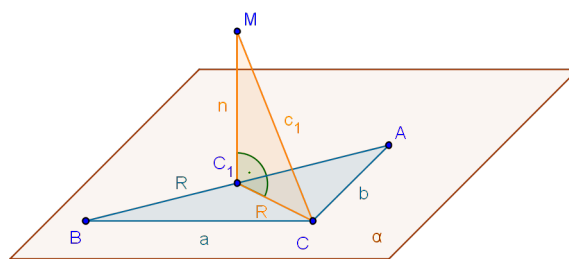
a) Tačke A, B, C, D, E, F među sobom određuju $6 \cdot 5 : 2 = 15$ pravih. Tačka S sa tačkama A, B, C, D, E, F određuje još 6 pravih što je ukupno 21 prava.

b) 15 pravih iz ravni mnogougla određuju sa tačkom S 15 ravni, plus ravan mnogougla daju ukupno 16 ravni.

9. Tri tačke određuju najviše jednu ravan; tri paralelne prave određuju najviše 3 ravni; tri prave sa tri tačke određuju najviše $3 \cdot 3 = 9$ ravni. Znači ukupno 13 ravni.

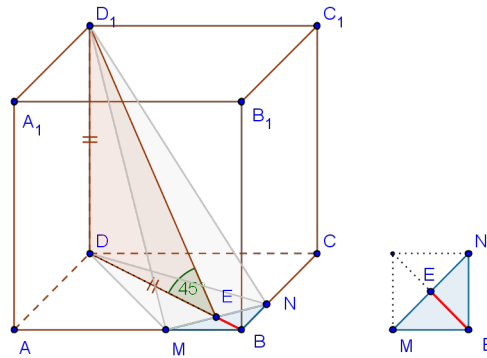
10. Tri kolinearne tačke određuju jednu pravu koja sa ostale dve tačke određuju najviše 2 ravni. Ostale dve tačke određuju jednu pravu koja sa tri kolinearne tačke određuje još najviše 3 ravni, pa ovih pet tačaka određuju najviše 5 ravni. Tri paralelne prave određuju najviše 3 ravni. Tri prave sa pet tačaka određuju najviše $3 \cdot 5 = 15$ ravni. Znači ukupno $5 + 3 + 15 = 23$ ravni.

11.



Hipotenuza AB trougla $\triangle ABC$ ima dužinu 5cm . Tačka C_1 je centar opisane kružnice $\triangle ABC$, pa je $C_1C = R = \frac{5}{2}\text{cm}$. Trougao $\triangle MC_1C$ je pravougli pa je $c_1^2 = n^2 + R^2$ odakle je $c_1 = \frac{5\sqrt{5}}{2}\text{cm}$.

12.



Nagibni ugao ravni MND_1 prema ravni $MND \equiv ABC$ je $\angle D_1ED$ što znači da je $\triangle D_1ED$ jednakokraki sa kracima $D_1D = ED = 10\text{cm}$. Dijagonala osnove $BD = 10\sqrt{2}\text{cm}$ pa je $BE = BD - ED = 10\sqrt{2}\text{cm} - 10\text{cm} = 10(\sqrt{2} - 1)\text{cm}$.

Sa slike desno se vidi da je $MN = 2 \cdot EB = 20(\sqrt{2} - 1)\text{cm}$.