

Prizma

Teorema. (Heronov obrazac) *Ako stranice trougla imaju dužinu a , b i c , onda je njegova površina*

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

gde je s poluobim trougla, tj. $s = \frac{a+b+c}{2}$

Zadaci

1. Površina baze prave trostrane prizme jednaka je $4cm^2$, a površine bočnih strana su $9cm^2$, $10cm^2$ i $17cm^2$. Kolika je zapremina prizme?
2. Površine triju strana pravouglog paralelopipeda koje se sastaju u istom temenu odnose se kao $4 : 3 : 1$. Izračunati površinu paralelopipeda ako je njegova dijagonala $78cm$.
3. Osnova prizme je romb, a omotač je $2400dm^2$. Jedna dijagonala romba je $40dm$, a rastojanje naspramnih bočnih strana jednako je visini prizme. Kolika je zapremina prizme?
4. Osnova pravog paralelopipeda je romb, a površine dijagonalnih preseka su P i Q . Izračunati površinu omotača.
5. Osnovne ivice kvadra su $3cm$ i $4cm$, a dijagonala kvadra je nagnuta prema ravni osnove pod uglom od 60° . Izračunaj površinu i zapreminu datog kvadra.
6. Jedno teme kocke udaljeno je od dijagonale te kocke $7cm$. Izračunati površinu kocke.
7. Data je pravilna jednakoivična šestrostrana prizma $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ ivice $a = 2cm$. Odredi površinu četvorougla $ABD_1 E_1$.
8. Data je pravilna jednakoivična šestrostrana prizma $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ ivice $a = 6cm$. Izračunaj površinu i zapreminu trostrane prizme $ABD A_1 B_1 D_1$.
9. Od kocke ivice $6cm$, sa četiri ravni normalne na bazu, odsečene su četiri jednake trostrane prizme, tako da su im baze jednakokrako pravougli trouglovi. Ostatak kocke predstavlja prizmu čija je baza pravilan osmougao. Izračunati zapreminu dobijene osmostrane prizme.
10. Površina osnove pravilne trostrane prizme je $36\sqrt{3}cm$, a odnos površine jedne osnove i površine omotača je $\sqrt{3} : 2$. Izračunaj zapreminu prizme.
11. Dijagonala pravilne četvorostrane prizme je $16\sqrt{3}cm$. Izračunaj površinu i zapreminu prizme ako je dijagonala prizme nagnuta prema ravni osnove pod uglom od 30° .

12. Dijagonala jedne bočne strane pravilne trostrane prizme je $8\sqrt{3}cm$. Izračunaj površinu i zapreminu prizme ako je dijagonala bočne strane nagnuta prema ravni osnove pod uglom od 60° .
13. Date su dve jednake prave prizme čije su osnove jednakokrako-pravougli trouglovi sa katetama od $5cm$. Visine prizmi su po $10cm$. Koliko različitih trostranih i četverostranih prizmi možemo da sastavimo od te dve prizme? Koja od njih ima najveću površinu?

Rešenja

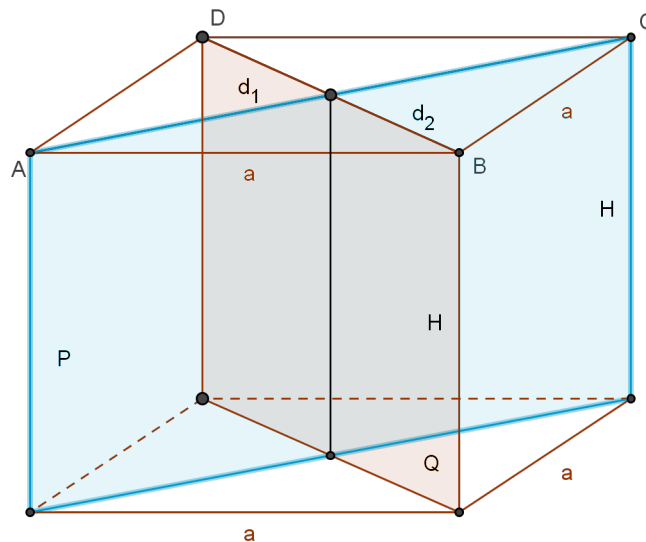
1. Neka je visina prizme H , tada je $a = \frac{9}{H}b = \frac{10}{H}c = \frac{17}{H}$. Primenimo li Heronov obrazac dobijamo da je $4 = \frac{36}{H^2}$, pa je $H^2 = 9$. Znači $H = 3cm$, pa je zapremina prizme $V = BH = 12cm^2$.

2. $ab : bc : ac = 4 : 3 : 1 \Rightarrow ab = 4k, bc = 3k, ac = k \Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = 4k \cdot 3k \cdot k \Rightarrow (abc)^2 = 12k^3$. Odavde je $a^2 = \frac{12k^3}{(bc)^2} = \frac{12k^3}{(3k)^2} = \frac{12k}{9}$. Na isti način dobijamo $b^2 = 12k$ i $c^2 = \frac{12k}{16}$.

Dijagonala kvadra je $D^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \frac{12k}{9} + 12k + \frac{12k}{16} = \frac{169k}{12}$. Kako je $D = 78cm$, imamo da je $\frac{169k}{12} = 78^2$, odakle je $k = 432cm^2$. Površina kvadra je $P = 2(ab + bc + ac) = 2(4k + 3k + k) = 16k = 16 \cdot 432cm^2 = 6912cm^2$.

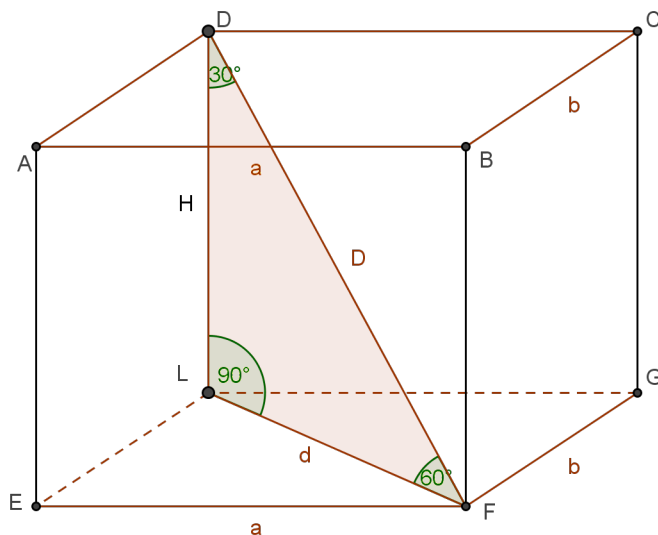
3. Neka je osnovna ivica a . Tada je $M = 4aH = 2400$, pa je $a = \frac{600}{H}$. Rastojanje naspramnih bočnih strana prizme je visina romba. Površina romba je $B = ah = H \cdot \frac{600}{H} = 600$. Kako je $B = \frac{d_1 d_2}{2}$ i $d_1 = 40$, to je $d_2 = 1200 : 40 = 30$. Stranica romba $a^2 = 20^2 + 15^2 = 625$, pa je $a = 25dm$, $H = 24dm$. Dakle, zapremina prizme $V = BH = 600dm^2 \cdot 24dm = 14400dm^3$.

4.



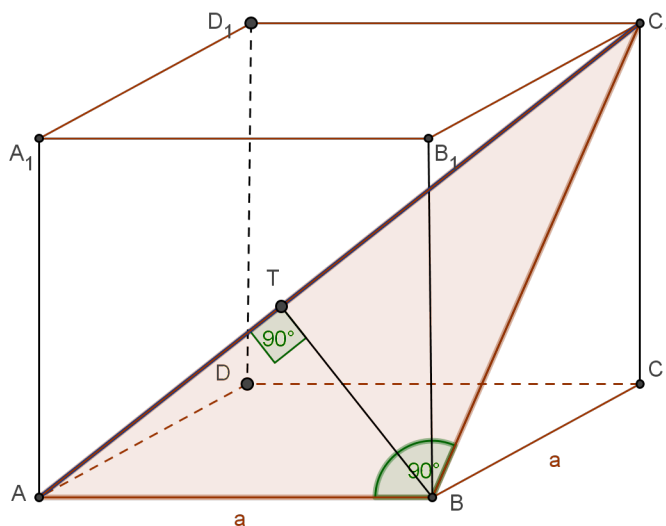
Omotač prizme je $M = 4aH$. Kako je $d_1 = \frac{P}{H}$ i $d_2 = \frac{Q}{H}$, to je $(2a)^2 = \frac{P^2}{H^2} + \frac{Q^2}{H^2}$. Znači da je $M = 2\sqrt{P^2 + Q^2}$.

5.



Dijagonala osnove jednaka je $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5\text{cm}$. Kako je trougao $\triangle DFL$ pravougli i $\angle DFL = 60^\circ$, to je $FD = 10\text{cm}$, a $DL = H = 5\sqrt{3}\text{cm}$. Površina kvadra je $P = (24 + 70\sqrt{3})\text{cm}^2$, a zapremina $V = 60\sqrt{3}\text{cm}^3$.

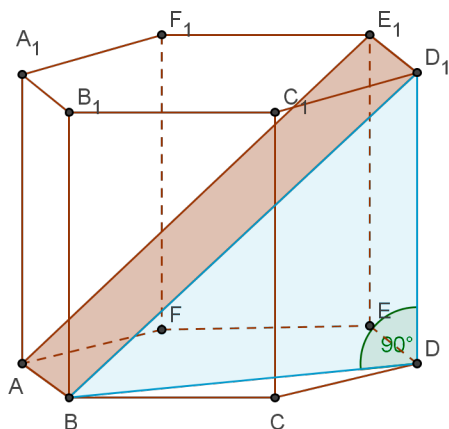
6.



Neka je AC_1 dijagonala kocke, a BT rastojanje tačke B od dijagonale. U pravouglom

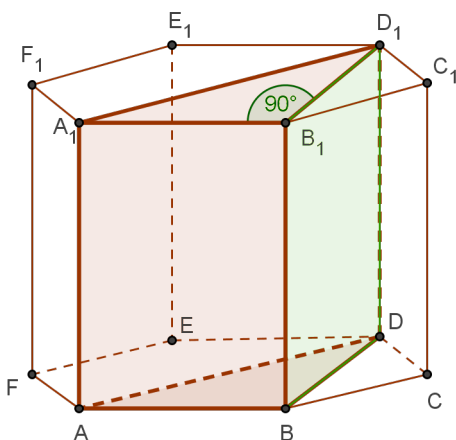
truglu $\triangle ABC_1$ je površina $P = \frac{AB \cdot BC_1}{2} = \frac{AC_1 \cdot BT}{2}$, tj. $\frac{a \cdot a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{3} \cdot 7}{2}$, odakle je $a = 7\sqrt{\frac{3}{2}}$ i $P = 6a^2 = 441\text{cm}^2$.

7.



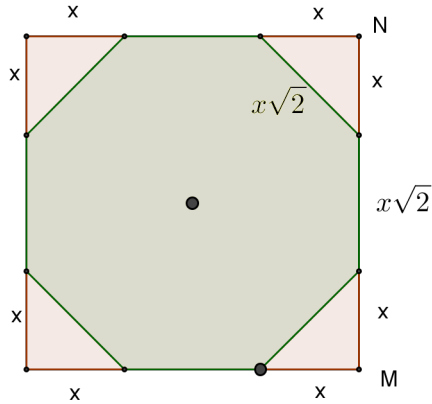
Kako je iz pravouglog trougla $\triangle BDD_1$ hipotenuza $BD_1 = \sqrt{BD^2 + DD_1^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = 2a = 4\text{cm}$, to je površina pravougaonika ABD_1E_1 jednaka $a \cdot 2a = 8\text{cm}^2$.

8.



Očigledno je $AB = 6\text{cm}$, $AD = 12\text{cm}$, a $BD = 6\sqrt{3}\text{cm}$. Kako je trougao ABD pravougli, to je površina baze $B = \frac{6 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}\text{cm}^2$. Zapremina prizme je $V = 18\sqrt{3} \cdot 6 = 108\sqrt{3}\text{cm}^3$. Površina prizme je $P = 2B + M = 2 \cdot 18\sqrt{3} + (6 + 12 + 6\sqrt{3}) \cdot 6 = 36(3 + 2\sqrt{3})\text{cm}^2$.

9.



$$V = 432(\sqrt{2} - 1)cm^3$$

10. $B : M = \sqrt{3} : 2$, pa je $M = 72cm^2$. Osnovna ivica prizme je $12cm$, pa zamenom u M nalazimo da je $H = 2cm$. Zapremina prizme je $72\sqrt{3}cm^3$.
11. $H = 8\sqrt{3}cm$, $a = 12\sqrt{2}cm$, $P = (288 + 384\sqrt{6})cm^2$, $V = 2304\sqrt{3}cm^3$.
12. $P = 168\sqrt{3}cm^2$, $V = 144\sqrt{3}cm^3$.
13. Možemo da sastavimo četiri različite prizme:
- 1) trostrana visine $20cm$ čija je osnova jednakokrako-pravougli trougao pa je površina $(225 + 100\sqrt{2})cm^2$;
 - 2) četverostrana visine $10cm$ čija je osnova kvadrat pa je površina $250cm^2$;
 - 3) četverostrana visine $10cm$ čija je osnova paralelogram pa je površina $(150 + 100\sqrt{2})cm^2$;
 - 4) trostrana visine $10cm$ čija je osnova jednakokrako-pravougli trougao katete $5\sqrt{2}cm$ pa je površina $(150 + 100\sqrt{2})cm^2$;
- Najveću površinu ima trostrana prizma visine $20cm$.