# Линеарне диофантске [1] једначине

**Дефиниција.** *Линеарна диофантска једначина (са две непознате) је једначина облика* $ax + by = c$ *где су* $a$, $b$ *и* $c$ *цели бројеви.*

Код оваквих једначина треба утврдити под каквим условима оне имају целобројна решења, колико решења постоји и како доћи до њих. Наводимо без доказа следећа тврђења која ће нам помоћи у решавању линеарних једначина.

**Теорема 1.** *Нека је* $d = НЗД(a, b)$. *Тада једначина* $ax + by = c$ *има решење ако и само ако је* $d|c$.

**Теорема 2.** *Нека су* $d = НЗД(a, b)$, $a_1 = \frac{a}{d}$ , $b_1 = \frac{b}{d}$, *и нека је* $(x_0, y_0)$ *једно пронађено решење једначине* $ax + by = c$, *тада се сва решења ове једначине могу записати у облику:* $x = x_0 + b_1k$, $y = y_0 - a_1k$ *где је* $k \in \mathcal{Z}$.

## Решени задаци

1. Одредити све целе бројеве $x$ и $y$ који представљају решења једначине $6x+5y = 59$.

   *Решење:* Изразимо једну од две непознате у овој једначини, нпр. $x = \frac{59 - 5y}{6}$. Сада због захтева да решења буду целобројна, покушајмо мало трансформисати израз на десној страни:

   $$x = \frac{59 - 5y}{6} = 9 + \frac{5}{6} - \frac{5y}{6} = 9 + \frac{5 - 5y}{6} = 9 + \frac{5(1 - y)}{6}$$

   Коначно $x$ ће бити цео број ако је $9+\frac{5(1 - y)}{6}$ цео број, а то ће бити ако је $1-y = 6k$, $k \in \mathcal{Z}$. Из последњих једнакости добијамо:

   $$y = 1 - 6k,\ x = 9 + \frac{5(1 - (1 - 6k))}{6} = 9 + 5k$$

   Овим смо дошли до закључка да наша полазна једначина има бесконачномного решења која можемо представити као уређен пар $(9 + 5k, 1 - 6k)$.

   Ово значи да за било које $k \in \mathcal{Z}$, овако добијени $x$ и $y$ представљају решења. Уверимо се, на пример за $k = 2$. Тада је $x = 19$ и $y = -11$. И заиста, проверивши $6 \cdot 19 + 5 \cdot (-11) = 59$ утврђујемо да је то једно од решења. Овако се за било које $k \in \mathcal{Z}$ може доћи до конкретног решења ове једначине.

   *Напомена.* Овде изложени поступак решавања је тзв. Ојлеров поступак.

[1] Диофант из Александрије (живео око 250. не), грчки математичар.

2. Купац је пазарио 12 јабука и крушака заједно. То га је коштало 132 динара. Ако једна јабука кошта 3 динара више од једне крушке и ако се зна да је купио више јабука него крушака, одредити колико је комада од сваког воћа купио.

   *Решење:* Уведимо непознате величине на основу текста задатка. Нека је број купљених јабука једнак $x$, тада ће број купљених крушака бити $12 - x$. Нека је цена јабука $y$, тада је цена крушака $y - 3$. Сада можемо саставити једначину:

$$xy + (12 - x)(y - 3) = 132$$

   Одавде се једноставном трансформацијом добија линеарна једначина:

$$3x + 12y = 168$$

   Можемо је поделити са 3 па добијамо

$$x + 4y = 56$$

   Слично изложеном поступку у првом задатку, једноставно долазимо до њених решења која можемо представити као:

$$x = 56 - 4t,\ y = t,\ t \in \mathcal{Z}$$

   Али, овде се јављају ограничења због броја јабука који је већи од броја крушака: $6 < x < 12$ тј. $6 < 56 - 4t < 12$, а одавде решавајући ове неједначине добијамо $44 < 4t < 50$ тј. $11 < t < 12,5$. Дакле, добијамода је $t = 12$. А одатле и

$$x = 56 - 4 \cdot 12 = 8,\ y = 12$$

   Дакле, купљено је 8 јабука и 4 крушке.

3. Које године претходног века је рођен Серафим ако је 2012. године напунио онолико година колики је збир цифара године његовог рођења?

   *Решење:* Дакле, због услова задатка да је Серафим рођен у претходном веку, његову годину рођења можемо записати као $19xy = 1900 + 10x + y$ где су $x$ и $y$ неке цифре. Преведимо сада текст задатка у једначину:

$$2012 - (1900 + 10x + y) = 1 + 9 + x + y$$

   Одавде добијамо:

$$11x + 2y = 102$$

   што је управо линеарна диофантска једначина. Производ $11x$ је непаран ако је $x$ непаран број, а паран ако је $x$ паран број. Одмах видимо да $x = 9$ није могуће, јер $2y$ је увек паран број. Дакле, следи закључак да и $x$ мора бити паран број. Кренимо са $x = 8$, заменом добијамо да је $y = 7$. Ако бисмо пробали и за $x = 6$, или неки мањи број, веома једноставно бисмо закључили да других решења нема, па имамо да је Серафим рођен 1987. године.

## Задаци за вежбу

1. Решити једначину $3x - 5y = 51$ у скупу целих бројева.
2. Решити једначину $2x + 7y = 2012$ у скупу целих бројева.
3. Решити једначину $13x + 4y = 111$ у природних бројева.
4. Решити једначину $2x + 6y = 2013$ у скупу целих бројева.
5. Како два брата могу поделити 2000 динара ако се зна да су све новчанице у апоенима од 100 или 200 динара, и један од њих добија оне од 100 а други од 200.
6. На колико начина можемо за 72 динара купити поштанске марке чије су цене 3 динара, 5 динара и 8 динара, ако морамо да купимо бар по једну од сваке?