# Диофантске једначине
# - одабрани задаци -

1. Влада је купио свеске по цени од 7 динара и оловке по цени од 4 динара и за то потрошио 60 динара. Колико је Влада купио оловки, а колико свески?

2. Износ од 2007 динара плаћен је новчаницама од 2 динара и 5 динара. Колико је којих новчаница било?

3. Одредити све целе бројеве $x$ и $y$ такве да је $4x + 9y = 58$.

4. У једном разреду било је 15 девојчица и 18 дечака. Како ће они међусобно поделити 1234 кликера тако да сви дечаци добију једнак број кликера и све девојчице, такође, добију једнак број кликера?

5. Доказати да следеће једначине немају целобројних решења:

   a) $3x + 15y = 2006$

   b) $21x - 35y = 88$

   c) $18x^2 - 33y^2 = 4444444$

6. Одредити једно решење, а затим написати опште решење следећих линеарних Диофантских једначина:

   a) $3x - 5y = 77$

   b) $4x + 11y = 121$

   c) $7x - 100y = 35$

7. Колико има парова природних бројева $(x, y)$ таквих да важи једнакост $3x + 7y = 555$?

8. Одредити све природне бројеве који задовољавају једначине:

   a) $x + 2y + 3z = 16$

   b) $2x + 3y + 4z = 23$

9. На складишту се налазе ексери упаковани у сандуке од 16, 17 или 40 килограма. Како, не отварајући сандуке, купцу испоручити тачно $100kg$ екесера?

10. Девојка Шехерезада је из ноћи у ноћ причала моћном султану по 3 или по 5 бајки. За колико је највише ноћи могла да исприча 1001 причу? За колико је ноћи најбрже то могла да учини?

11. У једној књижари свеска кошта $0,5$ (пола) €, збирка 2€, а уџбеник 5€. На колико се начина за тачно 100€ може купити тачно 100 предмета?

12. Одредити природне бројеве $x$ и $y$ тако да је $x^2 + 4y^2 = 244$.

13. У скупу природних бројева решити једначину: $5x^2 + 3y^2 = 1033$.

14. На колико начина се помоћу судова од 2 и 7 литара може напунити буре чија је запремина 1234 литра. Који је најбржи, а који је најспорији начин да се то уради?

15. Доказати да се коцка са ивицом дужине 13 може исећи на 1995 мањих коцки са ивицама дужине 1, 2 или 3. Колико се при том добија коцки чија ивица има дужину 3?

16. Разломак $\frac{281}{140}$ представити као збир три разломка чији су и бројиоци и имениоци једноцифрени бројеви.

17. Одредити троцифрени број чије су све цифре различите од нуле, а збир свих различитих двоцифрених бројева састављених од цифара овог броја (цифре се не могу понављати) једнак је том броју.

18. На колико начина се број 1984 може представити као збир узастопних природних бројева и који су то бројеви?

19. Одредити шестоцифрен број чији производи са 2, са 3, са 4, са 5 и са 6 представљју такође шестоцифрене бројеве који се пишу истим цифрама као и тражени број.

20. Коцка ивице $13cm$ исечена је на 1994 мање коцке са целобројном дужином ивица. Колике су димензије добијених коцки и колико којих коцки има?

21. Одредити све троцифрене бројеве који су 15 пута већи од збира својих цифара.

22. У соби се налазе столице са 3 и са 4 ноге. Када на све столице седну људи, у соби је укупно 69 ногу. Колико у соби има столица са 3, а колико са 4 ноге?

23. Ученик треба да реши 20 задатака. За свако тачно решење добија 8 поена, за нетачно решење му се одузима 5 поена, а задатак који није решавао се не бодује. Ученик је сакупио 13 поена. Колико задатака је тачно решио?

24. Одредити колико парова природних бројева $(x, y)$ задовољава једначину

    $3x + 8y = 1996$.

25. У координатној $xOy$ равни дата је тачка $M$ са координатама $(5, 3)$. Кроз тачку $M$ конструисана је права $p$ која координатне осе сече у тачкама $A(a, 0)$ и $B(0, b)$. Одредити све вредности $a$ и $b$ тако да су и $a$ и $b$ природни бројеви.

26. Ако се између цифара двоцифреног природног броја напише нула добија се број који је 9 пута већи од датог. Одредити о којим бројевима је реч.

27. У $xOy$ координатној равни дата је права $4x + 7y = 1998$. Колико тачака на датој правој имају обе координате које су целобројне и припадају првом квадранту координатне равни?

# Решења

1. Ако је број свески $x$, а број оловака $y$, онда је $7x + 4y = 60$. Јасно је да $x$ мора бити дељиво са 4, па у обзир долазе следећа решења: $x = 0, y = 15; x = 4, y = 8; x = 8, y = 1$.

2. Нека је било $x$ новчаница од 2 динара и $y$ новчаница од 5 динара. Тада је $2x+5y = 2007$. Једно решење дате једначине је $x_0 = 1, y_0 = 401$, па је опште решење: $x = 5k + 1, y = 401 - 2k$. Како је $1 \leq x \leq 1003$ и $1 \leq y \leq 401$ следи да је $1 \leq 5k + 1 \leq 1003$ и $1 \leq 401 - 2k \leq 401$, или $0 \leq k \leq 200$, па се тражена исплата може извршити на тачно 201 начин.

3. Једно решење дате једначине је $x_0 = 10, y_0 = 2$, па је опште решење: $x = 9k + 10, y = 2 - 4k$.

4. Нека су $x$ и $y$ број кликера које треба да добију девојчице, односно дечаци. Тада је $15x+18y = 1234$ и једначина нема решења, јер је лева страна једнакости дељива са 3, а десна није.

5. a) $D(3, 15) = 3$, а 2006 није дељиво са 3;

   b) $D(21, 35) = 7$, а 88 није дељиво са 7;

   c) $D(18, 33) = 3$, а број 4444444 није дељив са 3.

6. a) $x_0 = 29, y_0 = 2$, а опште решење је $x = 5k + 29, y = 3k + 2$.

   b) $x_0 = 0, y_0 = 11$, а опште решење је $x = 11k, y = 11 - 4k$.

   c) $x_0 = 5, y_0 = 0$, а опште решење је $x = 100k + 5, y = 7k$.

7. Једно решење дате једначине је $x_0 = 185, y_0 = 0$, па је опште решење: $x = 185 - 7k, y = 3k$. Како је $3 \leq x \leq 185$ и $3 \leq y \leq 79$ следи да је $3 \leq 3k \leq 79$, па је $1 \leq k \leq 26$, и дата једначина има тачно 26 решења у скупу природних бројева: $(3, 78); (10, 75); \ldots (171, 6); (178, 3)$.

8. a) Како је $x + 2y \geq 3$, то је $3z \leq 16 - 3 = 13$, па је $1 \leq z \leq 4$. Разматрајући све могуће случајеве добијају се решења: $(1, 6, 1)$; $(3, 5, 1)$; $(5, 4, 1)$; $(7, 3, 1)$; $(9, 2, 1)$; $(11, 1, 1)$; $(2, 4, 2)$; $(4, 3, 2)$; $(6, 2, 2)$; $(8, 1, 2)$; $(1, 3, 3)$; $(3, 2, 3)$; $(5, 1, 3)$; $(1, 1, 4)$.

   b) Како је $2x + 3y \geq 5$, то је $4z \leq 23 - 5 = 18$, па је $1 \leq z \leq 4$. Разматрајући све могуће случајеве добијају се решења: $(8, 1, 1)$; $(5, 3, 1)$; $(2, 5, 1)$; $(3, 3, 2)$; $(6, 1, 2)$; $(4, 1, 3)$; $(1, 3, 3)$; $(2, 1, 4)$.

9. Нека су $x$, $y$ и $z$ редом бројеви испоручених сандука од $16, 17$ и $40kg$. Тада је $16x+17y+40z = 100$. Очигледно је $y$ паран број $z = 0$, јер једначине $16x+17y = 60$ и $16x + 17y = 20$ немају решења. Тада је $16x + 17y = 100$, па је $x = 2$, $y = 4$, $z = 0$ једино могуће решење.

10. Ако је $x$ број ноћи у којима је Шехерезада причала 3, а $y$ број ноћи у којима је причала 5 бајки, онда је $3x + 5y = 1001$. Тада је $(332, 1)$ једно решење дате једначине, па је опште решење: $x = 332 - 5k, y = 3k + 1$. Како је $0 \leq y = 3k + 1 \leq 200$, то је $0 \leq k \leq 66$, па проблем има 67 решења. Најбржи начин да се испричају бајке је ако је $y$ што веће, тј. за 201 ноћ, а најспорије ако је $x$ што веће дакле за 333 ноћи.

11. Нека је број свески $x$, број збирки $y$ и број уџбеника $z$. Тада је $x + y + z = 100$, јер их укупно има 100. Потрошено је укупно 100€, па је $\frac{1}{2}x + 2y + 5z = 100$. Множењем друге једначине са 2, добијамо систем Диофантових једначина са три непознате:

    $x + y + z = 100$

    $x + 4y + 10z = 200.$

    Ако се од друге једначине одузме прва, добија се $3y+9z = 100$. Добијена једначина нема решења, јер је лева страна једначине дељива са 3, а десна није, па је немогуће за 100 динара купити 100 предмета.

12. Ако је $x^2 = a$ и $y^2 = b$, добија се једначина $a + 4b = 244$. Једно њено решење је $a_0 = 0$, $b_0 = 61$, па је $a = x^2 = 4k$ и $b = y^2 = 61 - k$. Следи да бројеви $k$ и $61 - k$ морају бити потпун квадрати. Значи да је $k = 25$ или $k = 36$. Тада су решења: $x = 10$, $y = 6$ или $x = 12$, $y = 5$.

13. Нека је $x^2 = a$ и $y^2 = b$, добија се једначина $5a + 3b = 1033$. Једно њено решење је: $a_0 = 2, b_0 = 341$, па је $a = x^2 = 3k+2$ и $b = y^2 = 341-5k$. Како је $x^2 = 3k+2$ и како су могући остаци при дељењу потпуног квадрата са 3 једнаки 0 или 1, једначина нема решења.

14. Ако је број судова од 2 литра $x$, а број судова од 7 литара $y$, онда је $2x+7y = 1234$. Како је једно решење добијене једначине $x_0 = 617$, $y_0 = 0$, то је опште решење $x = 617 - 7k$ и $y = 2k$. Како је $1 \leq x \leq 617$ и $0 \leq y \leq 176$ следи да је $0 \leq 2k \leq 176$, па је $0 \leq k \leq 88$, и дата једначина има тачно 89 решења у скупу природних бројева: $(1, 176); (8, 174); ...(610, 2); (617, 0)$. Дакле, пуњење бурета се може учинити на 89 различитих начина, при чему је најбржи први (177 сипања), а најспорији последњи (617 сипања).

15. Нека су $x$, $y$ и $z$ редом бројеви коцки дужине 1, 2 и 3. Тада је $x + y + z = 1995$ и $x + 8y + 27z = 13^3 = 2197$. Ако се од друге једначине одузме прва, онда је $7y + 26z = 202$. Једино "реално" решење добијене једначине у скупу $\mathbf{N}_0$ је $y = 14, z = 4$, па је $x = 1995 - 18 = 1977$.

16. Како је $140 = 2{\cdot}2{\cdot}5{\cdot}7$ и имениоци тражених разломака морају бити једноцифрени, они морају бити 4, 5 и 7. Тада је $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{5} + \dfrac{x}{7} = \dfrac{281}{140}$, па се множењем са 140 добија једначина $35x + 28y + 20z = 281$.

    Пошто број 281 при дељењу са 4 даје остатак 1, то и лева страна ове једначине мора при дељењу са 4 давати остатак 1. Како су $28y$ и $20z$ дељиви са 4, мора $35x$

при дељењу са 4 давати остатак 1. Провером добијамо да је $x = 3$ или $x = 7$. Како је за $x = 7$, $35x + 28y + 20z > 245 + 28 + 20 = 293 > 281$, следи да је $x = 3$. Тада је $28y + 20z = 176$ или $7y + 5z = 44$, па је $y = 2$ и $z = 6$. Тражени збир је $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} + \frac{6}{7} = \frac{281}{140}$.

17. Ако је тражени број $\overline{abc}$, онда је $100a+10b+c = \overline{ab}+\overline{ba}+\overline{ac}+\overline{ca}+\overline{bc}+\overline{cb} = 22(a+b+c)$, па се добија једначина: $78a = 12b + 21a$ или $26a = 4b + 7c$. Како је тражени број дељив са 22, па према томе и са 11, то је на основу правила о дељивости са 11 $a - b + c = 0$ или $a - b + c = 11$.

    Ако је $a = b - c$, онда је $26(b - c) = 4b + 7c$, па је $2b = 3c$, што значи да је цифра $b$ дељива са 3, па је $b$ једнако 3, 6 или 9. Тада су решења проблема бројеви 132, 264 и 396.

    Ако је $a = 11 + b - c$, онда је $26(11 + b - c) = 4b + 7c$, па је $26 + 2b = 3c$ и једначина нема решења, јер је $3c = 26 + 2b \geq 28$, што је немогуће.

18. Нека је $(a + 1) + (a + 2) + \cdots + (a + k) = 1984$. Тада је $ka + \frac{k(k+1)}{2} = 1984$ или $k(2a+k+1) = 2 \cdot 1984 = 2^7 \cdot 31$. Како су бројеви $k$ и $2a+k+1$ различите парности, то је или $k = 31$ или $k = 2^7 = 128$.

    Ако је $k = 31$, онда је $2a + 32 = 128$, па је $a = 48$ и тражени збир узастопних природних бројева је $49 + 50 + \cdots + 79 = 1984$.

    Ако је $k = 128$, онда је $2a + 129 = 31$, па $a$ није природан број.

19. Нека је тражени шестоцифрени број $k = \overline{abcdef}$. Како је и $6k$ шестоцифрени број, то је $k \leq 999999 : 6 = 166666$, па је цифра $a = 1$. Из чињенице $k < 2k < 3k < 4k < 5k < 6k$ следи да су прве цифре бројева $k$, $2k$, $3k$, $4k$, $5k$ и $6k$ различите, што значи да су све цифре различите, и да ниједна од њих није 0. Следи да је цифра $f$ непарна, јер ако би била парна, онда би последња цифра броја $5k$ била 0, што није могуће. Једна од тражених цифара је 5, јер се $5k$ због непарности цифре $f$ сигурно завршава цифром 5. Множењем непарне цифре $f$ са 1, 2, 3, 4, 5, 6 добијају се три парне и три непарне цифре, па су три од тражених цифара парне, а три непарне.

    Непарне цифре су 1, 5 и $f$. Број $k$ се завршава цифром $f$, број $5k$ цифром 5, а број $3k$ цифром $3f$, дакле, преосталом непарном цифром, а то је 1. Значи да је $f = 7$, па су последње цифре бројева $2k$, $4k$ и $6k$ једнаке 4, 8 и 2 и тражени број $k$ има цифре 1, 2, 4, 5, 7 и 8. Тада је $200000 \leq 2k \leq 299999$ и добија се $100000 \leq k \leq 149999$, па је цифра $b \leq 4$. Како је $700000 \leq k \leq 799999$, то је $140000 \leq k$, па је цифра $b \geq 4$, што значи да је $b = 4$. Следи да је $k$ један од бројева 142587, 142857, 145287, 145827, 148257 или 148527. Условима задатка одговара само број 142857, а бројеви $k$, $2k$, $3k$, $4k$, $5k$ и $6k$ тада су: 142857, 285714, 428571, 571428, 714285 и 857142.

20. Нека су $x_1, x_2, \cdots, x_{1994}$ дужине ивица тражених коцки и нека је при том $x_1, x_2, \cdots, x_k \geq 2$ и нека је $x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_{1994} = 1$. Тада је $13^3 = 2197 = x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{1994}^3 \geq 8k + 1994 - k = 7k + 1994$, па је $7k \leq 2197 - 1994 = 203$, односно $k \leq 29$. Тада је

$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_{29}^3+1+1+\cdots+1=1994$, па је $x_1^3+x_2^3+\cdots+x_{29}^3=2197-1965=232$. Нека је међу бројевима $x_1\cdots x_{29}$ $a$ има вредност 1, $b$ има вредност 2, $c$ има вредност 3, $d$ има вреедност 4, $e$ има вредност 5 и $f$ има вредност 6. Тада је $a+b+c+d+e+f=29$ и $a+8b+27c+64d+125e+216f=232$. Ако се од друге једнакости одузме прва добија се $7b+26c+63d+124e+215f=203$. Јасно је да је $f=0$, па се добија једначина: $7b+26c+63d+124e=203$. Како је $0\leq e\leq 1$, за $e=0$ добија се једначина $7b+26c+63d=203$. Како су 7, 63 и 203 дељиви са 7, то је и и $26c$ дељиво са 7, па је $c=0$ или $c=7$. Следи да је $7b+63d=203$ или $7b+63d=21$, односно $b+9d=29$ или $b+9d=3$. Сва решења добијених једначина дата су у следећој табели:

| Број коцки чија ивица има дужину | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1965 | 29 | 0 | 0 | 0 |
| 1973 | 20 | 0 | 1 | 0 |
| 1981 | 11 | 0 | 2 | 0 |
| 1989 | 2 | 0 | 3 | 0 |
| 1984 | 3 | 7 | 0 | 0 |

21. Нека је $100x+10y+z=15(x+y+z)$. Тада је $85x=5y+14z$. Како су 5 и 85 дељиви са 5 то мора бити и $z$, па се добија $17x=y$ или $17x=y+14$. Прва једначина нема решење (јер је $y\leq 9$ и $x\leq 1$), а решење друге једначине је: $x=1, y=3, z=5$, тј. ради се о броју $135=15(1+3+5)$.

22. Нека се у соби налази $x$ столица са 3 ноге и $y$ столица са 4 ноге. Тада је $3x+4y+2(x+y)=5x+6y=69$. Како су 6 и 69 дељиви са 3, то је $x$ непаран број дељив са 3. Једно од могућих решења је $(3,9)$, па је опште решење једначине: $x=3+6k, y=9-5k$. Сва решења проблема су: $(3,9)$; $(9,4)$, и у првом случају је у соби 12, а у другом 13 људи.

23. Ако је $x$ број тачних задатака, $y$ број нетачних задатака, а $z$ број нерешаваних задатака, онда је $x+y+z=20$ и $8x-5y=13$. Из прве једначине $y=20-x-z$, па је $8x-5(20-x-z)=13$, или $13x+5z=113$, па је $z=\dfrac{113-13x}{5}=22-2x-\dfrac{3(x-1)}{5}$. Тада је $x-1=5k$, па је $x=5k+1$, $z=20-13k$, $y=8k-1$. За $k=0$, добија се $x=6$, $y=z=7$.

24. Опште решење дате једначине је: $x=660-8k$, $y=3k+2$. Да би решења били природни бројеви мора $0\leq k\leq 82$, па једначина има укупно 83 решења у скупу природних бројева.

25. Нека тражена права $p$ има једначину $y=kx+n$. Како права $p$ садржи тачке $A$, $B$ и $M$ то је: $0=ka+n$; $b=0\cdot x+n$ и $3=5k+n$. Елиминацијом коефицијената $k$ и $n$ добија се $3a+5b=ab$. Тада је $(a-5)(b-3)=15$, па проблем има четири решења: $(a,b)\in\{(6,18);(8,8);(10,6);(20,4)\}$.

26. Ако је дати двоцифрени број $\overline{xy}$, онда је $100x+y=9(10x+y)$, па је $10x=8y$ или $5x=4y$. Тражене цифре су $x=4$, $y=5$, а дати број 45.

27. Опште решење једначине $4x + 7y = 1998$ у скупу целих бројева је: $x = 496 - 7k$, $y = 4k + 2$. Следи да је $0 \leq y = 4k + 2 \leq 85$, па је $0 \leq k \leq 70$, па права садржи тачно 71 тачку чије су обе координате природни бројеви.