Линеарне једначине и неједначине, VIII разред

Задаци са ранијих математичких такмичења у Србији

Овај материјал са задацима из области линеарних једначина који су били на ранијим такмичењима у Србији, намењен је ученицима осмог разред основне школе, који се припремају за учешће на такмичењима. Поред сваког задатка назначено је и такмичење на коме је он био постављен.

1 Задаци

1. Одредити a тако да једначине

$$2ax - \frac{1}{3}x = a + 4 \quad \textit{и} \quad -\frac{1}{4}(2x - 1) = x - \frac{1 + x}{2}$$

буду еквивалентне. (*Општинско такмичење 2012.*)

2. Одреди све рационалне бројеве x тако да је $|x + |x + |x||| = 2010$. (*Општинско такмичење 2011.*)

3. Решити једначину $|||x| + 1| + 2| = 2010$. (*Општинско такмичење 2010.*)

4. Решити једначину $|x + |2x + |4x||| = 2009$. (*Општинско такмичење 2009.*)

5. У једначини $3 \cdot (x - 4k) - 2k = 3 \cdot (2x - 3) + 1$ број k је реалан параметар. Одредити све вредности тог параметра за које је решење једначине веће од -2. (*Општинско такмичење 2007.*)

6. Одредити све реалне бројеве a тако да једначина $|x - 1| + |x - 2| = a$ има бесконачно много решења. (*Општинско такмичење 2006.*)

7. Наћи заједничка решења неједначина

$$\frac{3}{4}y - \frac{2}{3}(y - 1) \geq 0 \quad \textit{и} \quad \frac{1 - y}{2} - \frac{2 + y}{3} < 0$$

(*Општинско такмичење 2005.*)

8. Именилац датог разломка је за два већи од бројиоца. Одредити тај разломак, ако се зна да када се и од бројиоца и од имениоца одузме 1 добије се разломак $\frac{1}{2}$. (*Општинско такмичење 2004.*)

9. Одредити све рационалне бројеве a који задовољавају неједначину $\frac{3a - 2}{a + 1} < 0$. (*Општинско такмичење 2002.*)

10. Решити једначину $x + |x - 1| = 2 - |x|$, а затим израчунати производ квадрата разлике и збира квадрата њених решења. (*Општинско такмичење 2001.*)

11. За коју вредност променљиве x, израз

$$\frac{\frac{2}{3}-3x}{-x+\frac{1}{2}}$$

има вредност већу од 1? (*Општинско такмичење 2001.*)

12. Решити једначину $|||||x|+x|+x|+x|+x|=2000$. (*Општинско такмичење 2000.*)

13. Одредити за које вредности реалног броја m једначина $\dfrac{mx}{2}-3=2(x-m)$ има негативно решење. (*Окружно такмичење 2000.*)

14. Решити неједначину $(x-3)^2<x(x-3)$ и решења приказати на бројевној правој. (*Општинско такмичење 1999.*)

15. Решити једначину $|x-1|+\sqrt{x^2+6x+9}=1998$. (*Школско такмичење 1998.*)

16. За коју вредност реалног броја p једначина $3-\dfrac{x-p}{2}=x$ има целобројна решења по x, која задовољавају услов $|x|<2$? (*Општинско такмичење 1998.*)

17. Решити једначину $|x^2+2x+100|-|x^2+200|=3894$. (*Школско такмичење 1997.*)

18. Колико има целих бројева x који задовољавају неједначину $||x|-1|\leq 1997$? (*Општинско такмичење 1997.*)

19. Одредити сва реална решења следеће једначине

$$\frac{x}{1997}+\frac{x+1}{1998}=\frac{x+2}{1999}+\frac{x+3}{2000}.$$

(*Окружно такмичење 1997.*)

20. Решити једначину $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{1-2x+x^2}=1996$. (*Школско такмичење 1996.*)

21. Решити неједначину $|x|+1996>5x$. (*Општинско такмичење 1996.*)

22. Решити једначину $\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2+6x+9}=13$. (*Општинско такмичење 1990.*)

23. Решити једначину $|x-1|+|x+3|=2x+2$.(*Општинско такмичење 1989.*)

2 Упутства

Наведене су неке сугестије за решавање појединих задатака, како би процес решавања био олакшан, али не и комплетно наведен.

1. Да би једначине биле еквивалентне морају имати исте скупове решења. Пошто је друга једначина таква да не завити од броја a то њу треба најпре решити, а затим тако добијено решење убацити у прву једначину уместо x (јер због еквивалентности желимо да

и она има то решење) и њу решити по a.

2. Решавати за два случаја - (1°) када је x позитиван број и (2°) када је x негативан. У првом случају једначина постаје $3x = 2010$ и одатле је решење $x = 670$, а у другом $|x| = 2010$ и $x = -2010$.

5. Решити најпре једначину по x, а затим за тако добијено x и неједначину $x > -2$. Њен скуп решења је тражено решење задатка.

6. Због дефиниција апсолутних вредности $|x-1|$ и $|x-2|$ анализирати једначину за $x < 1$, $1 \leq x < 2$ и $x \geq 2$. За први и трећи случај једначина може имати највише једно решење, а за случај $1 \leq x < 2$ добиће се да за $a = 1$ има бесконачно много решења.

7. Решења ове две неједначине биће два скупа. Пресек та два скупа је тражено решење задатка. Најлакше га је одредити представљањем на бројевној правој.

8. Састављамо једначину $\dfrac{x-1}{(x+2)-1} = \dfrac{1}{2}$. Тј. $\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$, а одатле се добија $x = 3$. Тражени разломак је $\dfrac{3}{5}$.

9. Да би разломак био негативан мора бројилац бити позитиван а именилац негативан или обрнуто. Разликовати та два случаја и на крају узети унију добијених скупова решења.

11. Дакле, решавати неједначину $\dfrac{\frac{2}{3}-3x}{-x+\frac{1}{2}} > 1$.

13. Из $\dfrac{mx}{2} - 3 = 2(x-m)$ се решавањем по x добија $x = \dfrac{6-4m}{m-4}$. Негативно решење ће се добити за m за које је $\dfrac{6-4m}{m-4} < 0$. Решити ову неједначину!

15. Корен $\sqrt{x^2+6x+9}$ трансформишемо на следећи начин: $\sqrt{x^2+6x+9} = \sqrt{(x+3)^2} = |x+3|$, па једначина постаје $|x-1| + |x+3| = 1998$. Сада анализирати једначину за: (1°) $x < -3$, (2°) $-3 \leq x < 1$ и (3°) $x \geq 1$.

(1°) За $x < -3$ једначина постаје $-(x-1) + (-(x+3)) = 1998$. Одавде је $x = -1000$, и ово решење задовољава услов.

(2°) За $-3 \leq x < 1$ једначина постаје $-(x-1) + (x+3)) = 1998$, а одавде је $4 = 1998$, што је немогуће, па једначина нема решења у овом случају.

(3°) За $x \geq 1$ једначина постаје $x - 1 + x + 3 = 1998$, односно $2x = 1996$, одакле је $x = 998$. Па, и ово решење задовољава услов.

Дакле, једначина има два решења.

17. Овде је важно запазити да су изрази који су обухваћени апсолутним вредностима

позитивни за било које x, па је дата једначина еквивалентна једначини $x^2 + 2x + 100 - (x^2 + 200) = 3894$ која се једноставно решава.

18. Ова неједначина једноставном трансформацијом постаје $-997 \leq |x| - 1 \leq 997$, односно $-996 \leq |x| \leq 998$. А пошто је $|x|$ ненегативно, то тражене вредности x задовољавају неједначину $|x| \leq 998$. Последња неједначина има 1997 целобројних решења.

23. Искористити анализу из задатка 18.