Stepenovanje - II deo

Zadaci:

1. Odredi sve vrednosti prirodnog broja n za koji važi $\left(5\sqrt{2}\right)^n < \left(2\sqrt{5}\right)^4$

2. Kojom cifrom se završava broj $4^n + 5^n + 6^n$?

3. Odrediti x ako je $8^8 + (4^4)^x = 2^{25}$.

4. Dokazati da je broj $7^{2012} - 1$ deljiv sa 10.

5. Odrediti x ako je $\dfrac{2008^{2007} + 2008^{2008}}{2009} = 2008^x$.

6. Šta je veće 79^{499} ili 3^{1997}?

7. Dokazati da je izraz $16^5 + 2^{15}$ deljiv sa 33.

8. Šta je veće $5 \cdot 3^{61}$ ili $3 \cdot 5^{41}$?

Rešenja:

1. Treba odrediti sve vresnoti n za koje je $\left(5\sqrt{2}\right)^n < 400$.

Kako je $5^4 = 625$, to n mora biti manji od 4.
Tada je $\left(5\sqrt{2}\right)^3 = 250\sqrt{2} < 250 \cdot 1.5 = 375$.

Dakle, n može imati vrednost 1, 2 ili 3.

2. Broj 4^n se završava cifrom 4 ako je n neparan, a cifrom 6 ako je n paran. Broj 5^n se uvek završava cifrom 5, a broj 6^n se uvek završava cifrom 6. Dakle, ako je n neparan onda se traženi zbir završava cifrom 5 (4 + 5 + 6 = 15), a ako je n neparan onda se završava cifrom 7 (6 + 5 + 6 = 17).

3. Svodeći na stepene sa osnovom 2 dobijemo $2^{24} + 2^{8x} = 2^{25}$. Odavde je $2^{8x} = 2^{25} - 2^{24} = 2^{24}(2 - 1) = 2^{24}$. Dakle 8x = 24, pa je x = 3.

4. Ako broj 7 stepenujemo redom sa 1, 2, 3, 4, 5... zadnja cifra će biti 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, ... Dakle ako je izložilac deljiv sa 4 (što je slučaj sa brojem 2012), onda je zadnja cifra 1, pa je broju $7^{2012} - 1$ zadnja cifra 0, tj. ovaj broj je deljiv sa 10.

5. $2008^{2007} + 2008^{2008} = 2008^{2007} + 2008^{2007} \cdot 2008 = 2008^{2007} (1 + 2008) = 2008^{2007} \cdot 2009$.

Zamenom dobijamo da je $2008^{2007} = 2008^{x}$, pa je $x = 2007$.

6. $79^{499} < 81^{499} = (3^4)^{499} = 3^{1996} < 3^{1997}$.

7. $16^5 + 2^{15} = 2^{20} + 2^{15} = 2^5 \cdot 2^{15} + 1 \cdot 2^{15} = (2^5 + 1) \cdot 2^{15} = 33 \cdot 2^{15}$ što je deljivo sa 33 jer je jedan činilac deljiv sa 33.

8. $5 \cdot 3^{61} = 5 \cdot 3 \cdot 3^{60} = 15 \cdot 3^{60} = 15 \cdot (3^3)^{20} = 15 \cdot 27^{20} > 15 \cdot 25^{20} = 15 \cdot (5^2)^{20} = 15 \cdot 5^{40} = 3 \cdot 5 \cdot 5^{40} = 3 \cdot 5^{41}$.