

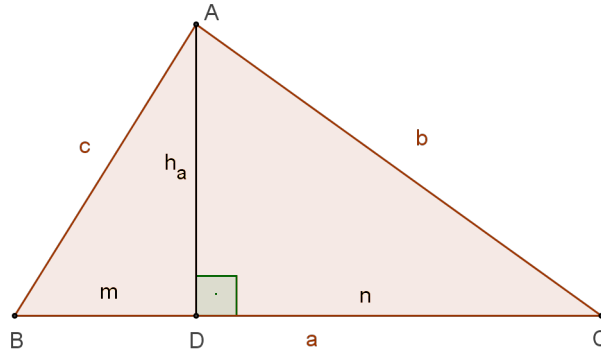
Heronov obrazac

Teorema. (Heronov obrazac) *Ako stranice trougla imaju dužinu a , b i c , onda je njegova površina*

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

gde je s poluobim trougla, tj. $s = \frac{a+b+c}{2}$

Dokaz:



Na osnovu Pitagorine teoreme, iz trougla $\triangle ABD$ je $h_a^2 = c^2 - m^2$, a iz trougla $\triangle ACD$ je $h_a^2 = b^2 - n^2$. Kako je $m + n = a$, to je $n = a - m$ pa zamenom dobijamo da je $c^2 - m^2 = b^2 - (a - m)^2 \Rightarrow c^2 - m^2 = b^2 - a^2 + 2am - m^2 \Rightarrow 2am = a^2 - b^2 + c^2 \Rightarrow m = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$.

$$\begin{aligned} h_a^2 &= c^2 - m^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} \right)^2 = \frac{4a^2c^2}{4a^2} - \frac{(a^2 - b^2 + c^2)^2}{4a^2} = \frac{(2ac)^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}{4a^2} = \\ &= \frac{(2ac - (a^2 - b^2 + c^2))(2ac + (a^2 - b^2 + c^2))}{4a^2} = \frac{(b^2 - (a^2 - 2ac + c^2))((a^2 + 2ac + c^2) - b^2)}{4a^2} = \\ &= \frac{(b^2 - (a - c)^2)((a + c)^2 - b^2)}{4a^2} = \frac{(b - (a - c))(b + (a - c))((a + c) - b)((a + c) + b)}{4a^2} = \\ &= \frac{(-a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)}{4a^2} \end{aligned}$$

Iz $s = \frac{a+b+c}{2}$ imamo da je $s - a = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2a}{2} = \frac{-a+b+c}{2}$ odakle je $-a+b+c = 2(s-a)$. Na isti način dobijamo da je $a-b+c = 2(s-b)$, $a+b-c = 2(s-c)$ i $a+b+c = 2s$. Zamenom u gornjoj jednakosti dobijamo:

$$h_a^2 = \frac{2(s-a) \cdot 2(s-c) \cdot 2(s-b) \cdot 2s}{4a^2} = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2} \text{ odakle je}$$

$$h_a = \sqrt{\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}} = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

$$\text{Konačno } P = \frac{ah_a}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Zadaci

1. Izračunaj površinu trougla sa stranicama $a = 27cm$, $b = 36cm$ i $c = 45cm$.

Rešenje:

$$s = \frac{a + b + c}{2} = 54cm.$$

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{54 \cdot 27 \cdot 18 \cdot 9} cm^2 = \sqrt{(3^3 \cdot 2) \cdot (3^3) \cdot (3^2 \cdot 2) \cdot (3^2)} cm^2 = \sqrt{2^2 \cdot 3^{10}} cm^2 = 2 \cdot 3^5 cm^2 = 2 \cdot 243 cm^2 = 486cm^2.$$

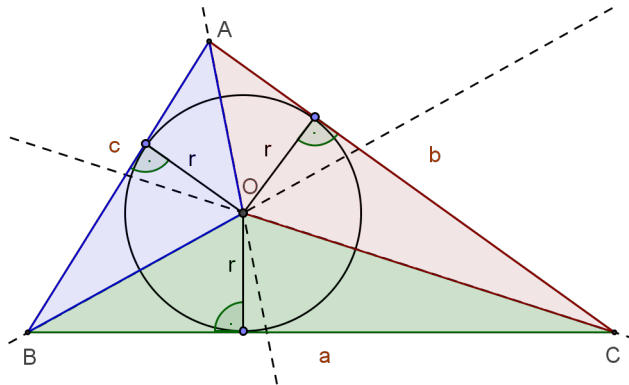
2. Stranice trougla ABC odnose se kao $9 : 10 : 17$, a obim mu je $72cm$. Izračunaj površinu tog trougla.

Rešenje:

$a : b : c = 9 : 10 : 17 \Rightarrow a = 9k, b = 10k, c = 17k$. Kako je obim trougla $O = a + b + c = 9k + 10k + 17k = 36k \Rightarrow k = \frac{72cm}{36} = 2cm$, pa je $a = 18cm, b = 20cm$ i $c = 34cm$. Primenom Heronovog obrasca dobijamo da je $P = 144cm^2$.

3. Izračunaj površinu trougla čiji je obim $O = 20cm$ i poluprečnik upisane kružnice $r = 5cm$.

Rešenje:



$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle BCO} + P_{\triangle CAO} + P_{\triangle ABO} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = sr.$$

$$s = O : 2 = 10cm \Rightarrow P_{\triangle ABC} = 50cm^2.$$

4. Ako su dužine stranica trougla $a = 25cm, b = 52cm, c = 63cm$, izračunaj poluprečnik upisane kružnice tog trougla.

Rešenje:

$$s = \frac{a + b + c}{2} = 70cm. P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 630cm^2.$$

Kako je $P = sr$ (vidi 3. zadatak), $r = \frac{P}{s} = 9cm$.

5. Stranice trougla se odnose kao $a : b = 4.625 : 1.625$ i $a : c = 0.74 : 0.8$, a obim tog trougla iznosi $90cm$. Izračunaj poluprečnik upisanog kruga tog trougla.

Rešenje:

$$a : b = 4.625 : 1.625 \Rightarrow b = \frac{1.625}{4.625}a = \frac{13}{37}a$$

$$a : c = 0.74 : 0.8 \Rightarrow c = \frac{0.8}{0.74}a = \frac{40}{37}a$$

$$O = a + b + c = a + \frac{13}{37}a + \frac{40}{37}a = \frac{90}{37}a. \text{ Kako je } O = 90cm \Rightarrow a = 37cm.$$

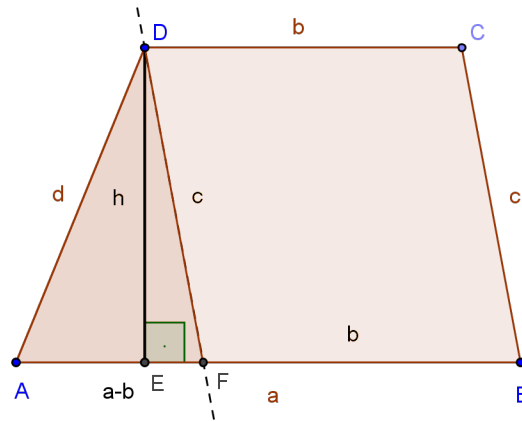
Stranice b i c iznose $b = \frac{13}{37}a = 13cm$ i $c = \frac{40}{37}a = 40cm$.

Površinu trougla računamo preko Heronovog obrasca $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ i dobijamo da je $P = 240cm^2$.

Kako je $P = sr$ (vidi 3. zadatak), $r = \frac{P}{s} = 5\frac{1}{3}cm$.

6. Kolika je površina trapeza ako su dužine njegovih osnovica jednake $22cm$ i $16cm$, a dužine krakova $25cm$ i $29cm$?

Rešenje:



Ako kroz teme D povučemo pravu DF koja je paralelna kraku BC , trapez $ABCD$ ćemo podeliti na trougao $\triangle AFD$ i paralelogram $FBCD$.

Stranice trougla $\triangle AFD$ su $AF = a - b = 6cm$, $FD = c = 25cm$ i $AD = d = 29cm$.

Poluobim trougla $\triangle AFD$ je $s = \frac{6 + 25 + 29}{2}cm = 30cm$. Na osnovu Heronovog

obrasca je $P_{\triangle AFD} = \sqrt{30 \cdot 24 \cdot 5 \cdot 1}cm^2 = 60cm^2$. Kako je $P_{\triangle AFD} = \frac{AF \cdot ED}{2} \Rightarrow h =$

$ED = \frac{2P_{\triangle AFD}}{AF} = 20cm$. Površina trapeza $P_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h = 380cm^2$.