JEDNAČINE SA APSOLUTNIM VREDNOSTIMA

Problemi sa apsolutnim vrednostima predstavljaju materiju koja efikasno sintetizuje sadržaje o linearnim jednačinama i nejednačinama. Pre nego što sintetičnost navedene materije ilustrujemo karakterističnim primerima podsetimo se definicije apsolutne vrednosti realnog broja:

$$\text{Ako je } a \in \mathrm{R}, \text{ onda je } |\, a \,| = \begin{cases} a \;\; ako \;\; je \;\; a > 0 \\ 0 \;\; ako \;\; je \;\; a = 0 \\ -a \;\; ako \;\; je \;\; a < 0 \end{cases}.$$

Definicija apsolutne vrednosti realnog broja se analogno prenosi i na apsolutnu vrednost izraza što znači da je apsolutna vrednost izraza I jednaka samom sebi, tj. I ako je izraz I pozitivan, 0 ako je $I = 0$ i jednak je $-I$ ako je izraz I negativan.

PRIMER 1:

Odredi skup rešenja jednačine $| x - 1 | + x = | x + 1 |$

Rešenje: Treba posmatrati izraze $x - 1$ i $x + 1$ i njihov znak.

$x - 1$	– – – – – – – –		– – – – – –	0	– – – – – –	1	+ + + + + + + + + +
$x + 1$	– – – – – – – –	- 1	+ + + + + +	0	+ + + + + +	1	+ + + + + + + + + +

Zbog toga razlikujemo pet slučajeva koji su vezani za tri intervala: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ i $(1, \infty)$ i dve granice uočenih intervala: – 1 i 1.

1) Ako je $x < -1$, onda je $x - 1 < -2 < 0$ i $x + 1 < 0$ i jednačina postaje $-(x - 1) + x = -(x + 1)$ ili $1 = -x - 1$, pa je $x = -2$. Kako broj – 2 pripada posmatranom intervalu, to smo dobili jedno rešenje.
2) Ako je $x = -1$, dobijamo da je $1 = 0$, pa – 1 nije rešenje jednačine.
3) Ako je $-1 < x < 1$, onda je $x - 1 < 0$, a $x + 1 > 0$ i jednačina postaje $-(x - 1) + x = x + 1$ ili $1 = x + 1$, pa je $x = 0$. Kako broj 0 pripada posmatranom intervalu, te smo dobili jedno rešenje.
4) Ako je $x = 1$ dobija se $1 = 2$, što znači da $x = 1$ nije rešenje jednačine.
5) Ako je $x > 1$, onda je $x - 1 > 0$ i $x + 1 > 0$, pa se dobija se jednačina $x - 1 + x = x + 1$ ili $x = 2$. Kako broj 2 pripada posmatranom intervalu, broj 2 je rešenje date jednačine.
Dakle skup rešenja jednačine je $S = \{-2, 0, 2\}$.

PRIMER 2:

Odredi skup rešenja jednačine: $|||||\, x \,| + x \,| + x \,| + x \,| + x \,| = 2000$.

Rešenje: Razlikujemo tri slučaja:

1) Ako je $x < 0$, onda je $|x| = -x$, pa data jednačina postaje $||||-x + x| + x| + x| + x| = 2000$ ili $|||x| + x| + x| = 2000$. Daljom transformacijom se dobija $||-x + x| + x| = 2000$, tj. $|x| = 2000$. Rešenje jednačine je -2000.

2) Ako je $x = 0$, jednačina nema rešenje, jer je $0 \neq 2000$.

3) Ako je $x > 0$, onda je $|x| = x$, pa data jednačina postaje $||||x + x| + x| + x| + x| = 2000$ ili $||||2x| + x| + x| + x| = 2000$. Daljom transformacijom jednačine se dobija $|||2x + x| + x| + x| = 2000$, tj. $||3x| + x| + x| = 2000$ i u sledećim koracima $||4x| + x| = 2000$, odnosno $|5x| = 2000$. Rešenje jednačine je 400.

Skup rešenje date jednačine je $S = \{-2000, 400\}$.

Zadaci za vežbu

Reši sledeće jednačine:

a) $|x| = 3$

b) $|x - 1| = 5$

c) $|3x - 12| = 2x - 3$

d) $|2x| + x = 6$

e) $|x| + |x - 2| = 8$

f) $|x| - |x + 1| = |x - 2|$

g) $||x + 3| - x| = 7$

h) $|x + 3| - x = |x + 9|$

Rešenja

a) $x_1 = -3,\ x_2 = 3$

b) $x_1 = -4,\ x_2 = 6$

c) $x_1 = 3, x_2 = 9$

d) $x_1 = -6,\ x_2 = 2$

e) $x_1 = -3,\ x_2 = 5$

f) jednačina nema rešenja

g) $x_1 = -5$

h) $x_1 = -4$