Dirihleov princip

U rešavanju različitih problema, naročito za dokazivanje postojanja objekata koji imaju neko određeno (traženo) svojstvo, često se veoma uspešno primenjuje takozvani Dirihleov princip (P.G.L. Dirichet, francusko-nemački matematičar 1805-1859), koji izražava jedno od osnovnih svojstava konačnih skupova.

Princip ”zečeva i kaveza”

Dirihhleov princip se najčešće iskazuje u raznim popularnim, čak I šaljivim formulama-kao: "problem zečeva i kaveza", on glasi:-Ako imamo 7 zečeva I 5 kaveza (ili uopšte, m zečeva i k kaveza, pri čemu je m veće od k) i sve zečeve razmestimo u date kaveze, onda mora postojati kavez u koji će biti smeštena bar 2 zeca.

Pretpostavljamo da ne postoji takav kavez u kome su 2 zeca. Onda je u svaki od kaveza smešteno najviše po 1 zec, tako da je ukupan broj smeštenih zečeva u ovom slučaju nije veći od 1•5=5 zečeva, a ima ukupno 7 zečeva, što je protivurečno našoj pretpostavci. Znači da postoji kavez u koji će biti smešten bar 2 zeca

"Princip kutija"

U nešto ozbiljnoj formi, Dirihleov princip se iskazuje "principom kutija".

1. Zamisli da imaš 308 kutija i 925 klikera u njima, onda će u nekoj od kutija biti bar 4 klikera. Da bi smo se uverili u to, razmišljaćemo ovako: ako bi u svakoj kutiji bilo najviše po tri klikera, onda ne bi bilo više od 308•3=924 klikera u kutijama.

Uveri se u u tačnost sledećih tvrđenja:

2. Ako je u 261 kutija stavljeno 1045 klikera, onda postoji kutija u kojoj je bar 5 klikera.

3. Ako je u 1522 kutije stavljeno 7 611 klikera, onda postoji kutija u kojoj je bar 6 klikera.

Matematička osnova Dirihleovog principa

Dirihleov princip se može izraziti sledećim teoremama od kojih je druga uopštenje prve:

- ✓ Ako se konačan skup sa n+1 elemnata razdeli u najviše n disjunktnih skupova, ond postoji skup sa najmanje dva elementa.
- ✓ Ukoliko je n·k+1 objekata raspoređeno u k skupova, tada se u jednom od tih skupova mora nalaziti barem n + 1 objekata.

Zadaci

1. a) Može li se tvrditi da u odeljenju od 34 učenika sigurno postoje bar dva učenika čija prezimena počinju istim slovom?
   b) A ako bi u odeljenju bilo 29 učenika?

Rešenje: Ovde "zečeve" predstavljaju učenici (ima ih 34), a "kaveze"-slova azbuke (ima ih 30).
a) U najnepovoljnom slučaju, za prezimena prvih 30 učenika biće "zauzeto" svih 30 slova, pa prezimena ostalih učenika (ima ih 4) moraju počinjati nekim od već "zauzetih" slova. Onda ovo znači da u odeljenju nasigurno postoje učenici (bar dvojica) čija prezimena počinju istim slovom.
b) Ne.

2. Tri vrste svezaka je spakovano u 25 kutija tako da u svakoj kutiji se nalaze sveske iste vrste. Da li postoji 9 takvih kutija da su sve sveske u njima iste vrste?

Rešenje: Zamislimo da imamo 3 velike kutije. U svakom od njih stavimo kutije sa sveskama, ali tako da su u bilo kojoj velikoj kutiji sve sveske iste vrste. Sad zamislimo da su kutije sa sveskama "klikeri". Znači imamo 3 velike kutije i u njima 25 "klikera". Po Dirihleovom principu ("klikera" ima 3.8+1) u jednoj od velikih kutija ima ima bar 9 "klikera", tojest u jednoj od velikih kutija ima bar 9 kutija sa sveskama iste vrste.

3. Dokazati da u školi sa 735 učenika najmanje 3 učenika imaju rođendan istoga dana?

Rešenje: Pošto godina ima 365 (366) dana, a u školi je 735 učenika, onda prema Dirihleovom principu ("klikera" odnosno učenika ima 365.2+5 ili 366.2+3) onda u školi od 735 učenika postoji najmanje bar 3 učenika koji imaju rođendan istog dana.

4. U razredu ima 30 đaka i svi su radili test. Jedan od njih, Aca, napravio je 13 grešaka (može biti samo toliko) radeći test. Ostali su napravili manje grešaka. Dokazati da su bar 3 đaka napravila isti broj grešaka(može biti nijedna).

Rešenje: Zamislićemo da imamo 14 kutija i da su na njima napisani brojevi 0,1,2,3,...13. U kutiju označenu sa 0 (nula) grešaka, stavljamo sve testove u kojima je bilo nula grešaka, u kutiju označenu sa 1 stavljamo sve testove u kojima je bilo 1 greška. Takav postupak se nastavlja do kutije sa brojem 13-biće Acin test. Zadatak će biti rešen ako dokažemo da se u nekoj kutiji nalaze bar tri testa.
U kutiji sa brojem 13 nalazi se samo Acin test, pa zato posmatramo preostale kutije. Primenimo Dirihleov princip: ako bi u svakoj od preostalih kutija bilo po najviše po dva testa, onda bi u njima bilo najviše 2∙13=26 testova. Računajući i Acin test, dobijamo da ukupno ima 27 testova, što nemože biti, jer ima 30 đaka, a svi su radili test. Prema tome, u nekoj od kutija nalazi se bar 3 testa.

5. U jednoj osmogodišnjoj školi u svakom razredu ima po 4 odeljenja, a ukupan broj učenika je 111. Dokazati da postoji odeljenje u kome uči bar 35 učenika.

Rešenje: U školi ima 4∙8=32 odeljenja. Međutim 111:32=34 i ostatak 23, pokazuje na osnovu Dirihleovog principa, da u nekom odeljenju sigurno ima bar 35 učenika.

6. U kutiji se nalaze 10 crvenih, 8 plavih i 8 zelenih olovaka i 4 žute olovke. U mraku izvlačimo olovke. Koliko najmanje olovaka moramo izvući da bismo bili

sigurni da je među njima: a) ne manje od 4 olovaka iste boje? B) bar po jedna olovka svake boje? V) ne manje od 6 plavih olovki?

Rešenje: a) Primetimo da su olovke u 4 različite boje. Ako izvučemo 4 olovke može se desiti da su one različite boje. Znači, nije dovoljno izvući 4 olovke. Izvlačimo još dva puta po 4 olovke. Najgora mogućnost je da su od izvučenih 12 olovaka 3 crvene, 3 plave, 3 zelene i 3 žute olovke. Ako izvučemo još jednu olovku, onda ćemo biti sigurni da su među izvučenim olovkama bar 4 olovke iste boje (Dokaži to, koristeći Dirihleov princip!).

b) Kad izvučemo nekoliko olovaka, može se se desiti da sve one budu iste boje. Znači, može se desiti da prvo izvučemo svih 10 crvenih olovaka. Isto tako, u najgorem slučaju, može se desiti da smo izvukli sve plave i zelene olovke-ukupno njih 26. Ako izvučemo još jednu olovku (ona će biti žuta, jer su u kutiji ostale samo žute), onda će među izvučenim olovkama biti bar po jedna olovka svake boje. Prema tome, dovoljno je izvući 27 olovaka (dokaži to primenom Dirihleovog principa!).

v) Da bismo bili sigurni da smo izvukli ne manje od 6 plavih olovaka, izvući ćemo iz kutije sve olovke sem dve, tojest izvući ćemo 28 olovaka. Nije dovoljno izvući 27, jer ako izvučemo samo 27 olovaka, može se desiti da smo izvukli 10 crvenih, 5 plavih, 8 zelenih i 4 žute.

Zadaci za vežbu

1. Dato je 1999 prirodnih brojeva. Dokazati da je bar 1000 datih brojeva iste parnosti.

Uputstvo: Dve kutije, u jednoj su parni, a u drugoj neparni brojevi...

2. Među 100 proizvoljnih prirodnih brojeva postoji bar 34 broja koja pri deljenu sa 3 imaju isti ostatak. Dokazati.

Uputstvo: Tri kutije sa istim ostacima...

3. Dato je 999 proizvoljnih prostih brojeva. Dokazati da se bar 250 datih prostih brojeva završava istom cifrom. Da li tvrđenje važi za 998 prostih brojeva?

Uputstvo: Prosti brojevi se mogu završavati ciframa 1, 3, 7 ili 9. Četiri kutije...

4. Dokazati da se od proizvoljnih 6 celih brojeva mogu izabrati dva čija je razlika deljiva sa 5.

Uputstvo: Od 6 brojeva sigurno postoje dva koja pri deljenju sa 5 daju isti ostatak...

5. Bela ravan je na proizvoljan način poprskana plavom bojom. Dokazati da u plavo-beloj ravni postoje dve tačke iste boje (plave ili bele) čije je rastojanje 1 cm.

Uputstvo: U toj ravni nacrtati jednakostraničan trougao stranice 1cm. Tri tačke, dve boje...

6. Svaka od stranica i dijagonala konveksnog šestougla na proizvoljan način je obojena plavom ili crvenom bojom. Dokazati da postoji trougao čija su temena temena šestougla i čije su sve stranice iste boje.

Uputstvo: Ako jedno teme šestougla spojimo sa ostalih pet temena, među tih 5 duži je bar 3 obojeno istom bojom. Sada treba posmatrati duži koje spajaju druge krajeve ove 3 istobojne duži...

7. Nespretni učenik je mastilom zabrljao pravougaoni list hartije dimenzija 21 cm h 30 cm, tako da je ukupna površina svih nastalih mrlja 314 cm^2. Dokazati da na tom listu hartije postoje dve tačke, simetrične prema jednoj od osa simetrije pravougaonika, koje se nalaze u neizbrljanom delu papira.

Uputstvo: Ako savijemo list po jednoj njegovoj osi tako da se mrlje preslikaju, ostaće najmanje 2cm^2 neumrljanog papira. Preostale "beline" su simetrične u odnosu na osu savijanja...

8. Nekoliko lukova date kružne linije obojeno je plavom bojom tako da je zbir dužina svih obojenih lukova manji od polovine obima kružne linije. Dokazati da postoji prečnik kruga čije su obe krajnje tačke iste boje.

Uputstvo: Povučemo prečnike kroz krajnje tačke neobojenih lukova i posmatramo dobijene lukove na suprotnoj strani kružnice. Ovi lukovi ne mogu sadržati samo plave tačke...

9. U kutiji se nalazi 10 belih i 7 crvenih kuglica. Koliko najmanje kuglica treba uzeti iz kutije (bez gledanja), da bi među njima sigurno bile 3 crvene kuglice ?

Odgovor: 13.

10. U vreći se nalazi 70 loptica raznih boja: po 20 crvenih, plavih i žutih, dok su ostale crne. Koliko najmanje loptica treba uzeti slučajnim izvlačenjem iz kutije da bi među njima bilo ne manje od 10 loptica iste boje?

Odgovor: $4 \bullet 9+1$.

11. Prema najnovijem popisu stanovništva u 5990 mesnih zajednica na teritoriji šireg područja grada Beograda živi 1883764 stanovnika. Dokazati da postoje bar dve mesne zajednice sa istim brojem stanovnika.