DELJIVOST

- ✓ Broj je deljiv složenim brojem ako je deljiv svim njegovim uzajamno prostim činiocima.
  Npr. pošto je $12=3\cdot4$, onda je broj deljiv sa 12 ako je deljiv i sa 3 i sa 4. Broj je deljiv sa 36 ako deljiv i sa 4 i sa 9 ($36=4\cdot9$). Broj je deljiv sa 33 ako je deljiv i sa 3 i sa 11...
- ✓ Broj je deljiv sa 8 ako mu je trocifreni završetak deljiv sa 8.
- ✓ Broj je deljiv sa 11 ako mu je razlika zbira cifara na parnim i neparnim mestima deljiva sa 11.
- ✓ Ako samo jedan sabirak nije deljiv nekim brojem, onda ni zbir nije deljiv tim brojem.

Zadaci

1. Umesto * u broju 3145* staviti odgovarajuću cifru tako da dobijeni broj pri deljenju sa 3 i 5 daje jednake ostatke. Odrediti sva moguća rešenja.

2. Odrediti najmanji prirodan broj koji je deljiv sa 75, a čiji se dekadni zapis sastoji samo od nula i jedinica.

3. Odrediti sve trocifrene brojeve takve da su i oni i zbir njihovih cifara deljivi sa 15.

4. U broju $\overline{4a1b}$ umesto slova a i b staviti odgovarajuću cifru tako da dobijeni broj bude deljiv sa 12. Odrediti sva rešenja.

5. U broju $\overline{1991ab}$ slova a i b zameniti ciframa tako da dobijeni broj bude deljiv sa a) 11; b) 33; c) 72.

6. Dokazati da je broj 30000...0006 (1991 nula) deljiv sa 18 a nije deljiv sa 36.

7. Dokazati da je zbir prvih 1000 prirodnih brojeva deljiv sa 143.

8. Dat je broj 111...111 (1991 jedinica). Dokazati da dati broj nije deljiv ni sa 11 ni sa 37.

9. Dat je broj 111...111 (1992 jedinice). Dokazati da je dati broj deljiv i sa 11 i sa 37.

10. Postoji li prirodan broj kod kojeg je proizvod cirfara 385?

11. Odrediti najmanji prirodan broj koji se piše samo pomoću petica a koji je deljiv sa a) 165; b) 185.

12. Odrediti nepoznate cifre x i y tako da broj $\overline{199xy}$ bude deljiv sa 66.

13. Dešifrovati množenje *3** · 45 = 37*15*.

14. Odrediti najmanje prirodne brojeve m i n kojim treba pomnožiti broj 864 da bi se redom dobio kvadrat odnosno kub prirodnog broja.

15. Broju 10 dopisati sleva i sdesna po jednu cifru tako da dobijeni broj bude deljiv sa 36.

16. Umesto a i b napisati odgovarajuće cifre tako da zbir brojeva $\overline{323a}$ i $\overline{b460}$ bude deljiv sa a) 9; b) 18; c) 11.

17. Dat je broj 19911991...19911991 (1992 puta je napisan broj 1991). Dokazati da je dati broj deljiv sa 33, a nije deljiv sa 66 ni sa 99.

Rešenja

1. Broj 3145* je deljiv sa 3 i 5 ako je * = 5. Dakle, traženi brojevi su 31455 (ostatak je 0), 31456 (ostatak 1) i 31457 (ostatak 2).

2. Da bi broj bio deljiv sa 75 mora biti deljiv sa 3 i 25. To znači da zbir njegovih cifara mora biti deljiv sa 3, a dvocifreni završetak mora biti 00, 25, 50 ili 75. Najmanji takav broj koji se piše samo pomoću nula i jedinica je 11100.

3. Kako zbir cifara traženog trocifrenog broja mora biti deljiv sa 15 u obzir dolazi samo zbir cifara 15 (jer najveći mogući zbir cifara trocifrenog broja iznosi 27). Broj koji je deljiv sa 15 je deljiv i sa 3 i sa 5, tj. poslednja cifra mu je 0 ili 5. Ako je poslednja cifra 0, onda su traženi brojevi 690, 780, 870 i 960. Ako je poslednja cifra 5, onda su traženi brojevi 195, 285, 375, 465, 555, 645, 735, 825 i 915.

4. Dvocifreni završetak zbog deljivosti sa 4 mora biti 12 ili 16, pa je b ili 2 ili 6. Zbir cifara je tada 4+a+1+b = 5+a+b i jednak je 5+a+2=7+a ili 5+a+6=11+a. Dakle a, zbog deljivosti sa 3, u prvom slučaju može biti 2, 5 ili 8, a u drugom slučaju 1, 4 ili 7. Traženi brojevi su 4212, 4512, 4812; 4116, 4416, 4716.

5. Najmanji broj koji je deljiv sa 11 je 199100. Preostali brojevi su 199111, 199122, 199133, 199144, 199155, 199166, 199177, 199188 i 199199.

Od navedenih brojeva sa 3, a samim tim i sa 33 su deljivi 199122, 199155 i 199188.
Da bi broj bio deljiv sa 72 mora biti deljiv sa 8 i 9, a to znači da mu trocifreni završetak mora biti deljiv sa 8 i zbir cifara deljiv sa 9. dakle u obzir dolazi zbir cifara 27 i 36, pa s obzirom na deljivost sa 8 postoji samo jedno rešenje 199152.

6. Dati broj je deljiv sa 18 jer je paran (deljiv sa 2) i jer mu je zbir cifara 9 – deljiv je sa 9. Nije deljiv sa 36 jer nije deljiv sa 4, pošto dvocifreni završetak 06 nije deljiv sa 4.

7. Zbir prvih 1000 brojeva je $500 \cdot 1001$ ($1+1000 = 2+999 = 3+998 = ... = 500+501 = 1001$ – pet stotina parova po 1001). Kako je $500 \cdot 1001 = 500 \cdot 11 \cdot 91 = 500 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 13$ i kako je $11 \cdot 13 = 143$ to tvrđenje je tačno.

8. Broj 111...111 (1991 jedinica) nije dljeiv sa 11 jer je razlika zbira cifrana na parnim i neparnim mestima jednaka 1, a 1 nije deljivo sa 11.
Broj 111...111 (1991 jedinica) jednak je zbiru brojeva 111...11100 (1989 jedinica i dve nule) i broja 11. Kako je prvi deljiv sa 37, a drugi nije to ni njihov zbir nije deljiv sa 37. (Pogledaj rešenje sledećeg zadatka za deljivost sa 37).

9. Broj 111...111 (1992 jedinice) je deljiv sa 11 je je razlika zbira cifara na parnim i neparnim mestima jednaka 0, a 0 je deljiva sa 11.
Broj 111...111 (1992 jedinice) je deljiv sa 111 jer je 1992 deljivo sa 3 (111 111 ... 111 : 111 = 1 001 001 ... 001). Kako je $111 = 3 \cdot 37$, to je dati broj deljiv sa 37.

10. Rastavljanjem na proste činioce dobijamo da je $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$. Kako 11 nije cifra u dekadnom sistemu, to broj čiji je proizvod cifara 385 ne postoji.

11. a) Broj $165 = 5 \cdot 33 = 5 \cdot 3 \cdot 11$, pa je najmanji takav broj deljiv sa 3, 5 i 11. Dakle broj petica je paran (zbog deljivosti sa 11 razlika zbira cifara na parnim i neparnim pozicijama mora biti 0) i deljiv sa 3, a to je 555555 (6 petica).
b) Kako je $185 = 5 \cdot 37$ i kako je $555 = 5 \cdot 111 = 5 \cdot 3 \cdot 37$, to je najmanji takav broj 555.

12. Broj je deljiv sa 66 ako je deljiv sa 2, 3 i 11. Dakle y je parna cifra, $1+9+9+x+y = 19+x+z$ mora biti deljivo sa 3 i $1+9+y – (9+x) = 1+y-x$ je deljivo sa 11. Kako $1+y-x$ ne može biti 11, onda je $1+y-x = 0$, tj. x je za jedan veće od y. Sada je zbir cifara $19+x+y = 19+1+y+y = 20+2y$, pa y može biti 2 ili 8. Dakle traženi brojevi su 19932 i 19998.

13. Broj 37*15* je deljiv sa 45, a to znači sa 5 i 9. Prema tome njegova poslednja cifra je 0 ili 5. Zbir cifara broja 37*150 je deljiv sa 9 ako je *=2, a zbir cifara broja 37*155 je deljiv sa 9 ako je *=6. Dakle moguća rešenja su 372150 i 376155. Kako je $372150:45 = 8270$, a $376155:45=8359$ to se očigledno radi o proizvodu $8359 \cdot 45 = 376155$.

14. Rastavljanjem na proste činioce imamo da je $864 = 2^5 \cdot 3^3$. Da bi broj $864 \cdot m$ bio potpun kvadrat m mora biti 6, jer je tada $864 \cdot 6 = 2^6 \cdot 3^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2)^2 \cdot (3 \cdot 3)^2 = 8^2 \cdot 9^2 = (8 \cdot 9)^2 = 72^2$. Ako je $864 \cdot n$ potpun kub, onda je n = 2, pa je $864 \cdot 2 = 2^6 \cdot 3^3 = = 4^3 \cdot 3^3 = (4 \cdot 3)^3 = 12^3$.

15. Neka je traženi broj $\overline{x10y}$. Da bi broj bio deljiv sa 36 mora biti deljiv i sa 4 i sa 9. Zbog deljivisti sa 4, cifra y može biti 0, 4, ili 8. Zbir cifara je tada x+1, x+5 i x+9. Prema tome x je tada 8, 4 ili 9, tj. radi se o brojevima 8100, 4104 i 9108.

16. Traženi broj se može napisati u oblku zbira 3690+1000b+a = 3690+990b + 10b+a. Kako je 3690+990b deljiv i sa 9 i sa 18, to treba da je 10b+a deljiv sa 9, odnosno 18. U obzir dolaze 90, 81, 72, 63, 54, 45, 36, 27 i 18 ili zbirovi 3230+9460, 3231+8460, 3232+7460, 3233+6460, 3234+5460, 3235+4460, 3236+3460, 3237+2460, 3238+1460. Zvi ovi zbirovi su deljivi sa 9, a samo parni i sa 18.
Sličnim razmatranjem kao u prvom slučaju dobijamo rešenja: 3231+6460, 3232+7640, 3233+8640, 3234+9640, 3237+1460, 3238+2460, 3239+3460.

17. Broj 19911991...1991 (1992 puta) ima zbir cifara 1992·20 = 3·664·20, pa je deljiv sa 3 ali nije sa 9. Zbir cifara na parnim mestima jednak je zbiru cifara na neparnim mestima pa je broj deljiv i sa 11, tj. deljiv je sa 33.
Broj nije deljiv sa 66 jer je neparan, pa nije deljiv sa 2. Nije deljiv ni sa 99 jer je deljiv sa 11 ali nije deljiv sa 9.