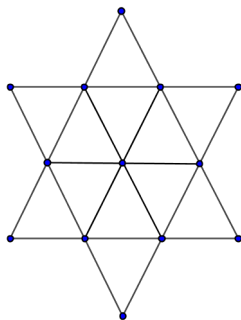


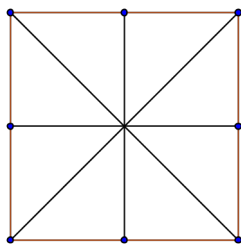
Geometrijski objekti

Zadaci

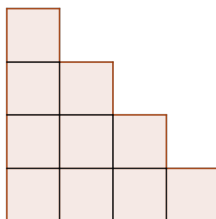
1. Tačke A, B i C su na jednoj, a D i E na drugoj od dve paralelne prave. Nabroj sve duži i sve trouglove koje određuju tih pet tačaka.
2. Date su dve paralelne prave a i b . Na pravoj a date su tačke A, B, C i D , a na pravoj b tačke E, F i G . Koliko je konveksnih četvorouglova određeno tim tačkama?
3. Dat je skup tačaka $\{A, B, C, D, E, F\}$ takav da tačke A, B, C i D pripadaju pravoj a , a tačke E i F njoj paralelnoj pravoj b . Nabroj sve prave takve da svaka sadrži dve tačke iz datog skupa.
4. Kvadrat čija je stranica 6cm podeljen je kvadratne centimetre. Koliko se duži, a koliko kvadrata može uočiti na tako dobijenoj slici?
5. Na pravoj p date su redom tačke M, N, P i Q . Odredi $(MN \cup NP) \setminus (PQ \setminus MP)$.
6. Dato je pet različitih tačaka u ravni koje ne pripadaju jednoj pravoj. Za svaki od različitih položaja datih tačaka izračunaj broj pravih koje one određuju.
7. Koliko se duži može uočiti na sledećoj slici? Krajevi duži su istaknuti na slici.



8. Koliko duži i koliko trouglova ima na sledećoj slici?



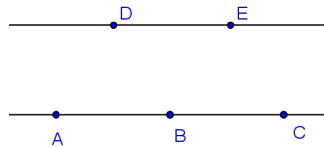
9. Koliko kvadrata, a koliko pravougaonika (koji nisu kvadrati) ima na sledećoj slici?



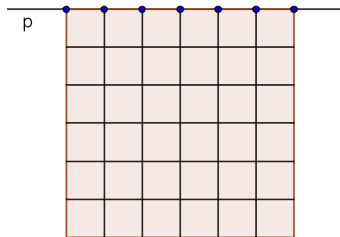
10. Šta sve može biti presek dva oštra ugla? Nacrtati sve moguće figure (slučajeve).
11. Koji sve mnogouglovi mogu nastati kao presek jednog oštrog ugla i jednog kvadrata? Svoje rešenje obrazloži odgovarajućim crtežima.
12. Koliko najmanje, a koliko najviše treba konstruisati pravih u ravni da bi one podelile ravan na 7 oblasti?
13. U ravni su date tri različite kružnice i dve različite prave. Koliko najviše presečnih tačaka one mogu imati međusobno? Presečna tačka je ona koja je zajednička za dve od ovih figura.
14. Na pravoj p je dato sedam različitih tačaka: A, B, C, D, E, F, G . Koliko duži one određuju?
15. Date su paralelne prave p i q . Neka su na pravoj p date tačke A, B i C , a na pravoj q tačke D, E i F . Koliko četvorouglova određuju ove tačke?
16. Dato je 5 nekolinearnih tačaka A, B, C, D, E i prava p koja sadrži tačke M, N i P . Koliko pravih, a koliko duži je određeno ovim sistemom tačaka?
17. Nacrtati konveksne skupove tačaka P i Q tako da $P \cup Q$ i $P \setminus Q$ budu nekonveksni skupovi tačaka.
18. Na koliko najmanje i najviše ograničenih i koliko neograničenih oblasti dele ravan pet pravih ako se svake dve od njih međusobno seku?
19. Konstruisati dve prave koje seku dati trougao tako da na dobijenoj slici bude tačno a) 3, b) 4, c) 5 trouglova.
20. Da li je moguće konstruisati dve prave koje dati kvadrat seku tako da na dobijenoj slici postoji tačno a) 3, b) 4, c) 5 trouglova?
21. Koliko je najviše ravni određeno sa 10 nekolinearnih tačaka?
22. Najveće rastojanje tačke A od kružnice je $7cm$, a najmanje $3cm$. Izračunati poluprečnik te kružnice.
23. Date su tri kružnice poluprečnika $1cm$, $2cm$ i $3cm$. Nacrtati te kružnice tako da sve tri imaju samo jednu zajedničku tačku. Nacrtati sva moguća rešenja.

Rešenja

1. Određene su sledeće duži: $AB; AC; AD; AE; BC; BD; BE; CD; CE; DE$ i sledeći trouglovi: $\triangle ABE; \triangle ABD; \triangle ACE; \triangle ACD; \triangle BCE; \triangle BCD; \triangle EDA; \triangle EDB; \triangle EDC$. Dakle 10 duži i 9 trouglova.



2. Svaka duž prave a sa svakom duži prave b određuje jedan četvorougao. Kako se na pravoj a može uočiti 6 duži, a na pravoj b 3 duži, ukupno ima $6 \cdot 3 = 18$ četvorouglova.
3. Ima ukupno ima 10 pravih: $a, b, AE, AF, BE, BF, CE, CF, DE, DF$.
- 4.



Odaberimo bilo koju pravu dobijene kvadratne mreže (vidi sliku). Kako je na njoj 7 tačaka, one određuju ukupno 21 duž. Takvih pravih ima 14 (7 horizontalnih i 7 vertikalnih), pa je ukupan broj duži $14 \cdot 21 = 294$. Duži mogu biti dužine $1cm, 2cm, 3cm, 4cm, 5cm$ i $6cm$ i ukupno ih ima redom 6, 5, 4, 3, 2 i 1, pa je ukupan broj kvadrata

$$6 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 91.$$

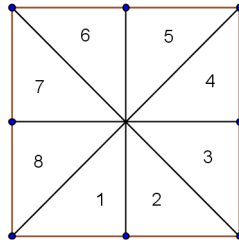
5. $(MN \cup NP) \setminus (PQ \setminus MP) = MP \setminus \emptyset = MP$.



6. Razlikujemo četiri slučaja.

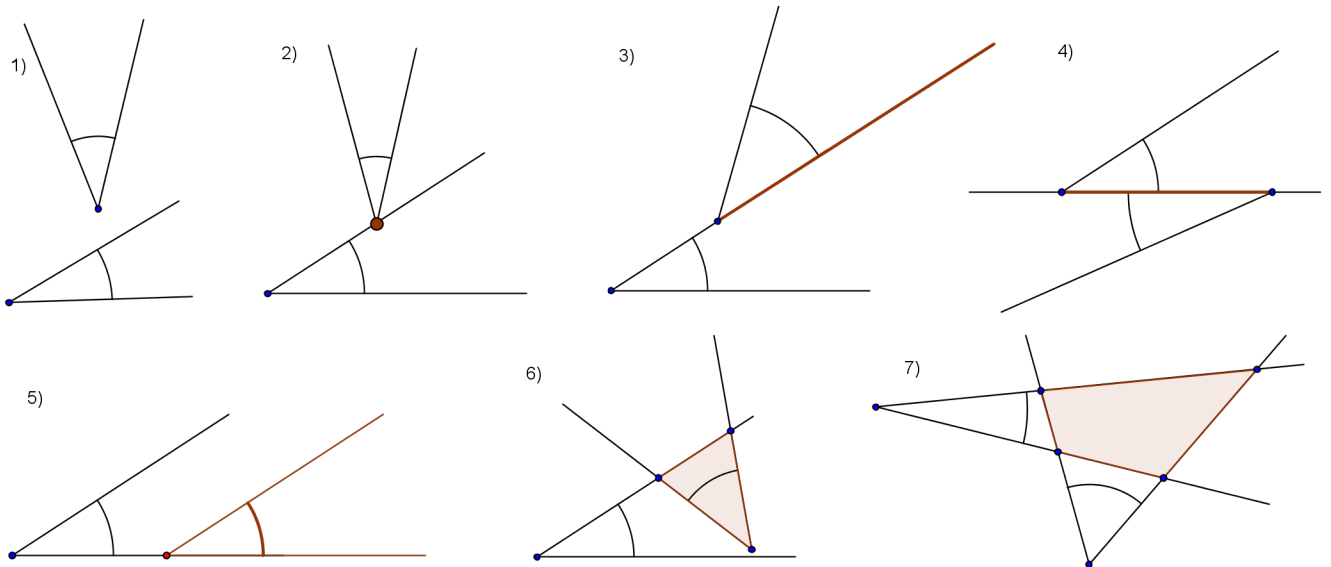
1) Ako 4 tačke pripadaju jednoj pravoj, a peta tačka ne, tada ima $1 + 4 = 5$ pravih.

- 2) Ako su dve trojke tačaka kolinearne, npr. A, B, C i A, D, E , tada ima $2 + 2 \cdot 2 = 6$ pravih.
- 3) Ako postoji samo jedna trojka kolinearnih tačaka, tada ima $1 + 1 + 3 \cdot 2 = 8$ pravih.
- 4) Ako nema trojki kolinearnih tačaka, tada ima 10 pravih.
7. Prebrojavanjem utvrđujemo da duži dužine 1 ima 24, dužine 2 ima 15, a dužine 3 ima 6. Ukupno ima 45 različitih duži.
- 8.

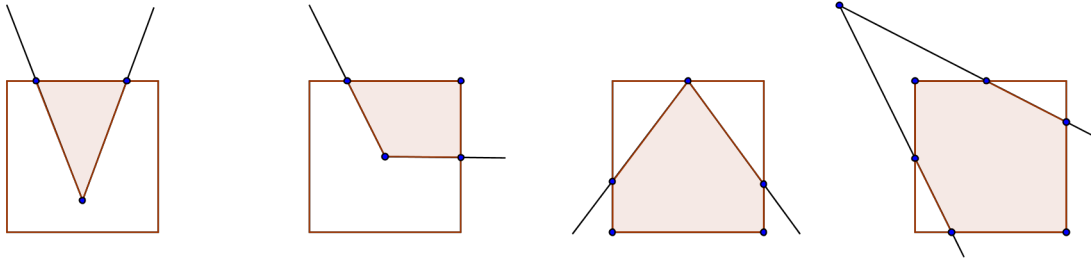


Na svakoj od 8 duži ima po tri duži, pa je ukupan broj duži $8 \cdot 3 = 24$. Posmatrajući sliku prebrojavamo da ima 16 trouglova: mali trouglovi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, zatim trouglovi sastavljeni od dva mala trougla $1i2$, $3i4$, $5i6$, $7i8$ i trouglovi sastavljeni od četiri mala trougla 1234, 3456, 5678 i 7812.

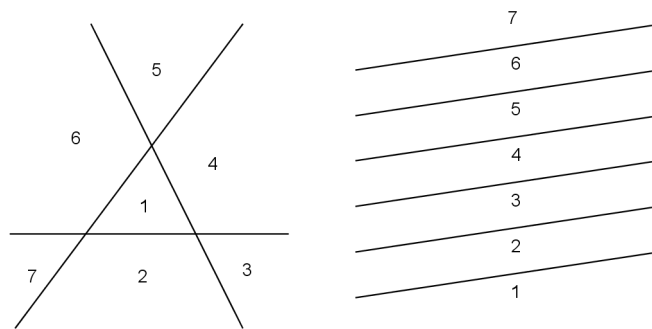
9. Kvadrati mogu biti dimenzija 1×1 ili 2×2 i ima ih $10 + 3 = 13$. Pravougaonika dimezija 1×2 ima 12, 1×3 ima 6, 1×4 ima 2 i 2×3 ima 2, ukupno ih ima 22.
10. Ima sedam slučajeva: prazan skup, tačka, poluprava, duž, ugao, trougao i četvorougao.



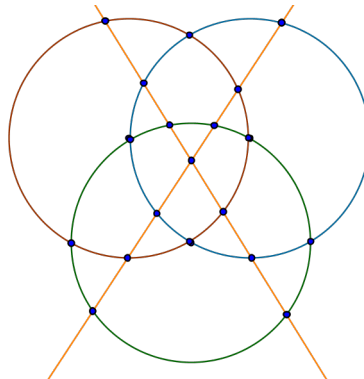
11. Trougao, četvorougao, petougao i šestougao.



12. Najmanje 3, a najviše 6 pravih.



13. Kružnice međusobno imaju 6 presečnih tačaka, svaka prava sa kružnicama po 6 tačaka i prave međusobno još jednu tačku. Ukupno 19 tačaka.



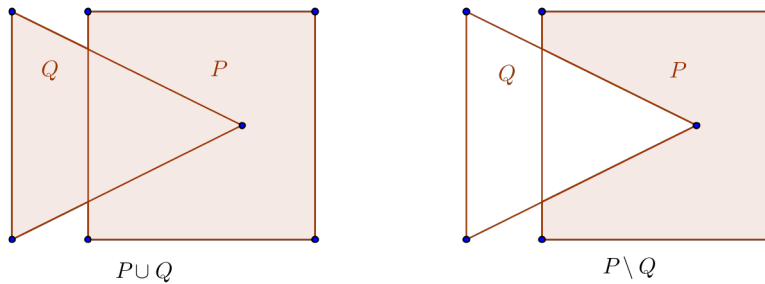
14. Ukupno 21 duž ($6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$).



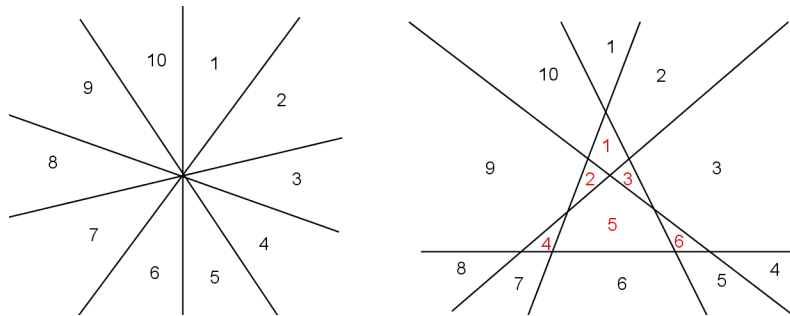
$AB, AC, AD, AE, AF, AG,$
 $BC, BD, BE, BF, BG,$
 $CD, CE, CF, CG,$
 $DE, DF, DG,$

$EF, EG,$
 $FG.$

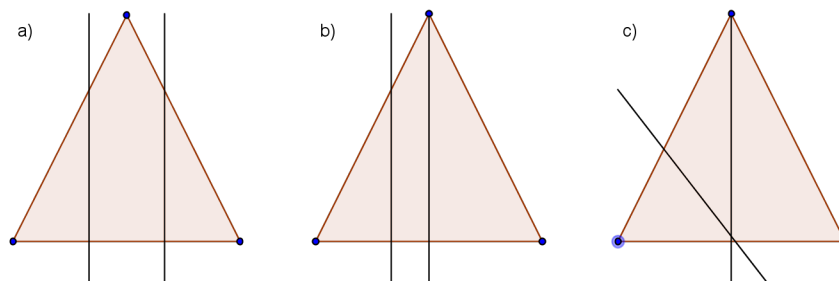
15. Biramo dve tačke sa prave p i dve tačke sa prave q . Takvih izbora ima $3 \cdot 3$, pa ima ukupno 9 četvorouglova.
16. Ima 26 pravih računajući i pravu p $((4 + 3 + 2 + 1) + 3 \cdot 5 + 1)$ i 28 duži $((4 + 3 + 2 + 1) + 3 \cdot 5 + 3)$.
17. Npr. P je kvadrat, a Q trougao kao na sledećoj slici.



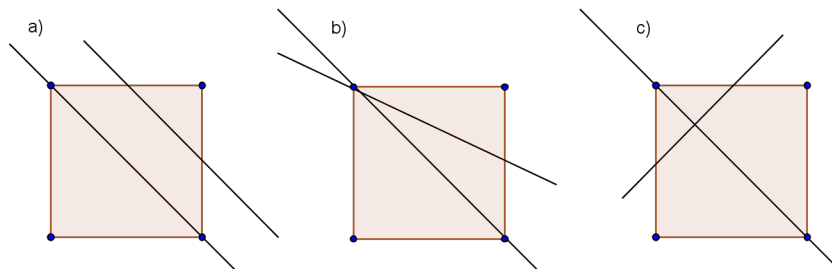
18. Najmanje 10 oblasti od toga 10 neograničenih i 0 ograničenih (slika levo). Najviše 16 oblasti od čega 10 neograničenih i 6 ograničenih (slika desno).



19.

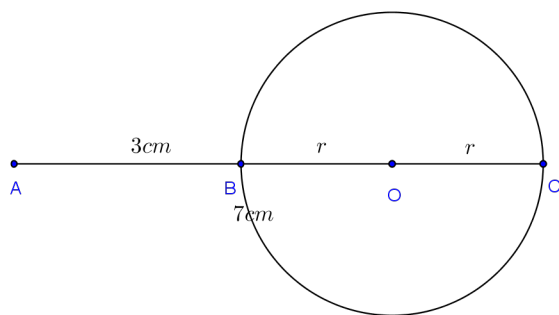


20.



21. Ravan je određena sa tri nekolinearne tačke, pa je zadatak ekvivalentan zadatku „Koliko je **trouglova** određeno sa 10 nekolinearnih tačaka?”. Parova tačaka ima $10 \cdot 9 : 2 = 45$. Svakom od ovih parova se može dodati po jedna od 8 preostalih tačaka, tako da trojaka tačaka ima $45 \cdot 8 : 3 = 120$.

22. $2r = CB = AC - AB = 7\text{cm} - 3\text{cm} = 4\text{cm} \Rightarrow r = 2\text{cm}$.



23. Kružnice se moraju dodirivati ili iznutra ili spolja. Ima 4 različita rešenja.

